

Отчет Жгуна В.С. для Фонда Династия Основные результаты за 2012 год.

Симплектические многообразия играют фундаментальную роль в современной алгебраической геометрии и математической физике. Исследования последних 20 лет показали тесную связь G -бирациональных инвариантов вложений однородных пространств для редуکتивной группы G и симплектической геометрии их кокасательных расслоений. Одним из примечательных результатов последних лет была теорема Д.И.Панюшева, которая утверждает, что для G -многообразия X и его G -инвариантного подмногообразия Y сложность и ранг конормального расслоения к Y в X равны соответственно сложности и рангу X . Напомним, что для многообразия X сложность - это коразмерность типичной орбиты в X борелевской подгруппы B в G , а ранг - это ранг решетки характеров B -полуинвариантных функций на X . В связи с этой теоремой Панюшев высказал гипотезу о том, что в кокасательном расслоении к G -многообразию X ранг и сложность G -инвариантного лагранжева подмногообразия равны рангу и сложности X соответственно (отметим, что конормальное расслоение к инвариантному подмногообразию в X как раз является примером инвариантного лагранжевого подмногообразия в кокасательном расслоении в X). В работе В.С.Жгуна и Д.А.Тимашева "Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями," опубликованной в Докладах Российской Академии наук, мы доказали обобщение теоремы Панюшева о сложности конормальных расслоений, которое заключается в том, что для конормального расслоения к G -инвариантному многообразию Y был описан стабилизатор общего положения в некоторой параболической подгруппе, канонически связанной с Y (эта подгруппа является нормализатором общих орбит борелевской подгруппы группы G в многообразии Y). Более того, в этой работе нам удалось доказать гипотезу Панюшева. Оказалось, что эта гипотеза может быть сформулирована в большей общности, чем это было сделано самим Панюшевым. А именно, пусть M симплектическое многообразие, снабженное отображением моментов, тогда все G -инвариантные лагранжевы подмногообразия в M имеют одинаковую сложность и ранг. Более того, разумно высказать гипотезу о том, что сложность и ранг G -инвариантного лагранжева подмногообразия могут быть выражены через симплектические инварианты M , а именно через коранг и дефект. Напомним, что корангом симплектического многообразия M называется ранг ограничения симплектической формы на косоортогональное дополнение к касательному пространству к общей G -орбите в M , а дефектом называется размерность ядра ограничения симплектической формы на касательное пространство к общей G -орбите в M . Отметим также, что эти инварианты могут быть выражены через размерность образа отображения моментов и размерность рационального фактора этого образа по группе G . В вышеуказанной работе, мы доказали эту гипотезу в случае, когда инвариантные лагранжевы подмногообразия являются квазиаффинными (или более обще невырожденными в терминологии Ф.Кнопа). Основным инструментом исследований было использование деформации к нормальному расслоению. Заметим, что нормальное расслоение к лагранжеву многообразию изоморфно кокасательному расслоению. Нами было показано, что при деформации к нормальному расслоению симплектическая форма на M деформируется в стандартную симплектическую форму на кокасательном расслоении к лагранжевому многообразию, а отображение моментов для M в стандартное отображение моментов. Более того, нам удалось показать, что M и кокасательное расслоение к лагранжевому подмногообразию, к которому было продеформировано M , имеют одинаковое замыкание образа отображения моментов. Последний результат является наиболее технически сложным (из общих теорем алгебраической геометрии очевидно только включение в одну сторону). Его доказательство опирается на глубокую теорию, развитую в вышеуказанной работе, описывающую структуру симплектического многообразия в окрестности лагранжева подмногообразия. Она обобщает теорию Кнопа,

описывающую G -эквивариантную структуру кокасательных расслоений. Учитывая результаты Кнопа (1990) о связи коранга и дефекта кокасательного расслоения со сложностью и рангом нулевого сечения, а также то, что коранг и дефект вычисляется по образу отображения моментов, мы получаем доказательство гипотезы и инвариантности ранга и сложности для G -инвариантных лагранжевых подмногообразий в симплектических многообразиях. Последняя теорема существенно обобщает упомянутые результаты Панюшева и Кнопа и является интересным достижением в эквивариантной симплектической геометрии.

Опубликованные работы

1) V.S.Zhgoon, On the Local Structure Theorem and equivariant geometry of cotangent bundles, Journal of Lie theory, принято в печать в Volume 23 (2013) 607–638, также см. preprint arXiv:1001.1421.

2) Жгун В.С., Тимашев Д.А., “Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями”, Доклады Академии Наук, 2012. Т. 443. № 4. С. 418-421.

Препринты

3) D.A. Timashev, Zhgoon V.S., “Hamiltonian actions on symplectic varieties with invariant lagrangian subvarieties”, arXiv:1109.5239.

Преподавание

- 1) Независимый Московский Университет Топология 1, (весна 2012)
- 2) Независимый Московский Университет Алгебраическая геометрия, (весна 2012)
- 3) Независимый Московский Университет Алгебраическая геометрия, (осень 2012).
- 4) Научно Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики
Семинар Коммутативная алгебра, (осень 2012).

Список докладов на конференциях.

1) Доклад “On the complexity of the invariant Lagrangian subvarieties in the symplectic G -varieties.” на международной конференции “Симметрические пространства и их обобщения II”, Левико-Терме, Тренто, Италия, 25-29 Июня 2012.

2) Доклад “On generation of the little Weyl group by reflections and products of orthogonal reflections” на Конференции Lie Groups and Algebraic Groups, 23-25 Июля 2012, Билефельд, Германия.

3) Доклад “On the complexity of invariant Lagrangian subvarieties in symplectic varieties with reductive group action” Конференция Рождественские математические встречи фонда “Династия” НМУ, Москва, 8-10 января 2012.

На основе совместной работы соавтором Д.А.Тимашевым была сделана серия докладов:

- 4) Тимашев Д.А. (совм. с В.С.Жгуном) “Symplectic varieties with invariant

Lagrangian subvarieties”, Algebra and Geometry International Conference dedicated to the 65-th anniversary of Askold G. Khovanskii June 4 - 9, 2012, (Moscow, Russia).

5) D.A. Timashev (joint with Vladimir S. Zhgoon) “Symplectic varieties with invariant Lagrangian subvarieties” Workshop: Toric Geometry, Oberwolfach, Germany, April 15th – April 21st, 2012.

6) D.A. Timashev (joint with Vladimir S. Zhgoon) “Complexity and rank of Lagrangian subvarieties” SoSe 2012 Seminar: Algebraic Geometry, 9 July, Berlin, Germany.

7) D.A. Timashev (joint with Vladimir S. Zhgoon) “Complexity and rank of Lagrangian subvarieties” Bremen