Андрей Бирюк
Кубанский государственный университет, Краснодар
Отчет за 2013 год.

1. Результаты, полученные в этом году. (жюри особо отмечает, что не следуют ограничиваться только списком опубликованных и поданных в печать работ, нужно кратко сформулировать результаты, причем крайне желательно ориентировать текст на широкую математическую аудиторию, а не только на узких специалистов в области исследования);

В этом году получены новые интересные продвижения с обобщением известных результатов типа слабо-сильной единственности для решений системы Навье-Стокса.

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - \Delta u = -\nabla p, \quad div\, u = 0, \quad u(0,\cdot) = u_0(\cdot).$$

Пространственная переменная предполагается трехмерной; мы рассматриваем решения удовлетворяющие стандартному энергетическому неравенству.

Классический результат Серрина заключается в том, что если существует сильное (более регулярное) решение системы Навье-Стокса, то любое слабое (априори менее регулярное) решение совпадает сильным. Теорема представляет интерес в свете того, что на сегодняшний день не доказаны теоремы единственности слабого решения системы Навье-Стокса и существования сильного решения. Введем понятие сингулярного множества решения, которое представляет собой множество точек четырехмерного пространства-времени, в окрестности которых $|u|$ является неограниченной величиной. Раннее мною, совместно с профессором Walter Craig было получено следующее обобщение:

Теорема А. Если два слабых решения системы Навье-Стокса с общими начальными данными имеют дизъюнктные сингулярные множества, то каждое сингулярное множество пусто, а эти решения являются сильными и совпадают.

Классическая теорема Серрина получается в случае, когда сингулярное множество одного из решений является пустым.

Возникает естественный вопрос. Можно ли обобщить теорему А до случая когда сингулярные множества пересекаются, но в общих точках имеют в некотором смысле «разную направленность». Например, в смысле микроканонического анализа, при котором множества рассматриваются не только в физическом пространстве, но в Фурье-физическом расслоении (в частности размерность удваивается). Поскольку преобразование Фурье рассматривается лишь по пространственным переменным, а время рассматривается как параметр, то итоговая размерность получается равна 7.

Подобно тому как дизьюнктность сингулярных множеств можно определить с помощью гладких срезающих функций, дизьюнктность сингулярных множеств в Фурье-физическом пространстве можно определить, используя псевдо-дифференциальные операторы.

Определение. Мы скажем, что два слабых решения u_1 и u_2 системы Навье-Стокса имеют отделимые FP-сингулярности, если существуют линейные операторы a, b и c, ограниченные как в пространстве L^2, так и в пространстве H^1, такие, что:

1. bu_1, cu_1, au_2, cu_2 являются гладкими функциями.
2. $a + b + c = Id$
3. Коммутаторы $[\nabla, a]$ и $[\nabla, b]$ являются ограниченными операторами в L^2.
4. Существует константа C, такая, что для любых гладких функций u и v справедливо неравенство:
$$|(au)v|_{L^2} \le C\, |u|_{L^2} |a^T v|_{L^\infty}$$
5. Функции $a^T b v_2$ и $b^T a u_1$ являются ограниченными.

Несложно установить, что, если u_1 и u_2 имеют дизъюнктные сингулярности, то они имеют отделимые FP-сингурярности. В этом случае в качестве операторов a, b и c необходимо взять операторы умножения на соответствующие гладкие срезающие функции.

Новое продвижение, также полученное совместно с Walter Craig заключается в следующем.

Теорема Б. Если два слабых решения системы Навье-Стокса с общими начальными данными имеют отделимые FP-сингулярности, то эти решения являются сильными (сингулярности отсутствуют) и совпадают. (Работа готовится к публикации)

В опубликованной работе [1] производится усиления результатов, раннее полученных М.И.Дроботенко и А.А. Свидловым заключающиеся в отказе от предположений о гладкости в теоремах существования и единственности для уравнения Россби, являющегося модельным уравнением распространения планетарных волн (возникающих в атмосфере планеты, а также в ее океанах, в следствии действия силы Кориолиса, вызванной вращением планеты).

Получен ряд результатов в результате работы со студентами. Они подробно описаны в следующем пункте, работы [3a]–[3f].

2. Опубликованные и поданные в печать работы.

[1] Бирюк А.Э. Дроботенко М.И. Свидлов А.А. *Негладкое решение уравнения Россби*. Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, (2013) №2, стр 89-94.

[2] Бирюк А.Э. *Преобразование уравнения Бюргерса*, Материалы 4-й международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», М.: Изд-во РУДН, 2013, (ISBN: 978-5-209-04820-6), стр. 646-647.

Следующие 6 работ опубликованы в: «Вестник студенческого научного общества факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета: Сборник научных трудов студентов и преподавателей факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета.» Выпуск.4. Краснодар: Кубанский государственный университет, 2013.

[3a] Бирюк А.Э. Зеленый А.С. *Об ускорении алгоритма нахождения последних ненулевых цифр числа n!* Стр. 19-23.

Статья посвящена способу ускорения алгоритма вычисления последних d ненулевых цифр числа n! (о котором подробно писалось в отчете за 2012 год), основанному на идее уменьшения основания экспоненты сложности по параметру d за счет замены арифметики по модулю 10 на арифметику по модулю 5 и решению некоторых возникающих на этом пути технических проблем. Поставлен вопрос о существовании алгоритма с полиномиальной сложностью по d. Напомним, что нас интересуют алгоритмы, эффективно (быстро) работающие для ситуаций, когда десятичная запись числа n исчисляется, например, сотнями цифр. В этом случае получение даже нескольких последних, не нулевых, цифр числа n! представляет собой не очевидную задачу.

[3b] Бирюк А.Э. Киричек Т.А. *Рассеивание света сферическими прозрачными телами.* Стр. 24-29

Изучается элементарное геометрическое поведение лучей света, падающих на сферическую каплю и имеющих показатель преломления n. Проследим за лучом, который, испытав k внутренних отражений, выходит из капли. Выписав явную формулу угла конечного направления луча, можно определить так называемые «направления максимально плотного светового потока», выходящего из сферических капель. На основе этого можно построить особо простую математическую модель радуги k-го порядка, на основе простого предложения, что потоки света максимальной плотности видны, а остальные нет. Результат сам по себе новым не является. Однако элементарный и простой способ изложения материала, по-видимому, является новым.

[3c] Бирюк А.Э. Шуманов Д.С. *Ошибка вывода на печать компилятора FREE PASCAL 2.4.4.* Стр. 55-56.

В этом компиляторе не печатается каждый 256 символ при использовании одного оператора write со многими аргументами. Проблема возникала при подключенном модуле CRT; и доставила немало проблем, например, при решении задачи [3a], что вызвало особую необходимость исследования проблемы и необходимость написания соответствующей заметки. К счастью, разработчики исправили этот bug в версии 2.6.2.

[3d] Бирюк А.Э. Шпыркова А.А. *Замаскированный приём увеличения привлекательности и доходности одного из видов курортного бизнеса.* Стр. 57-62.

Предположим, что мы должны попасть в цель 10 раз подряд. Если «чуть-чуть» уменьшить вероятность одного попадания, то на десяти выстрелах можно наблюдать существенное снижение вероятности выигрыша. Особый интерес представляет математическое обоснование того, почему (и за счет чего) снижение вероятности получается «визуально незаметным». Статья посвящена математическому исследованию данного феномена на конкретном примере.

[3e] Бирюк А.Э. Сильченко Е.Б. *Наиболее алгебраическое доказательство основной теоремы алгебры*. Стр. 83-87.

Основную теорему алгебры о существовании комплексного корня многочлена с комплексными коэффициентами обычно доказывают топологическими методами. Известно, что чисто алгебраического доказательства не существует. Тем не менее, если «поверить» в то, что полином нечетной степени над **R** имеет по крайней мере один действительный корень, что вытекает из свойств непрерывных функций, то алгебраическое доказательство есть! Результат, очевидно, является совсем не новым: впервые такое доказательство предложено Леонардом Эйлером еще в XVIII веке. Мы лишь предлагаем свой способ применения теории Галуа на этом пути.

[3f] Бирюк А.Э. Борисов Ю.В. *Последовательности производных и бесконечно дифференцируемые функции.* Стр. 88-89.

Для любой последовательности вещественных чисел, существует бесконечно дифференцируемая функция, такая, что последовательность последовательных производных в точке ноль совпадает с данной последовательностью чисел. Мы даем очередное доказательство (которое, вполне возможно, все и так знают) этой теоремы, имеющее важное значение в задачах гладкого продолжения функций, заданных на подмножестве на всё пространство.

3. Участие в конференциях и школах.

Я являлся со-организатором студенческой конференции КубГУ в апреле 2013года. Под моим руководством 6 студентов математического факультета представили свои результаты на конференции. Все работы опубликованы. Информация о представленных результатах с аннотациями подробно представлена в предыдущем пункте.

«Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования.»: 4-я Международная конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 25-29 марта 2013.

Доклад *Преобразование уравнения Бюргерса* сделан 27 марта 2013года.

XXIV Российский Фестиваль юных математиков, Анапа, 4 - 11 октября 2013 г. Работал в составе жюри математических боев среди одаренных школьников.
http://crdo-bernoulli.kubannet.ru/fum.html

30 октября 2013 года участвовал в интернет-конференции по проекту Концепции развития математического образования в Российской Федерации.

4. Работа в научных центрах и международных группах.

Продолжил работу в группе под руководством профессора Walter Craig из университета МакМастер (гор. Гамильтон, Канада) по тематике слабых решений системы Навье Стокса и теории турбулентности.

Поддерживаю научные связи с сотрудниками банка «Credit-Suisse», «Royal Bank of Canada» и другими международными банками, по вопросам применения теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов в тех или иных финансовых моделях.

Сотрудничаю с центрами проведения международных студенческих Интернет-олимпиад по математике и другим дисциплинам с центрами проведения этих олимпиад в г. Йошкар-Ола (Россия) и Ариэль (Израиль). Являюсь координатором проведения студенческих дисциплинарных олимпиад в Кубанском государственном университете (КубГУ, Краснодар). Подобные математические соревнования особенно важны для студентов не центральных ВУЗов (таких как КубГУ) повышая их мотивацию к учебной, а потом и к научной дейтельности.

5. Педагогическая деятельность (включая научное руководство).

В этом году я был избран председателем жюри регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике по Краснодарскому краю. Кроме этого, в качестве председателя региональной предметно-методической комиссии по математике, возглавил работу по методическому обеспечению (составление задач, проверка работ) начальных этапов Всероссийской олимпиады школьников в Краснодарском крае.

Работаю в программе повышения квалификации учителей школ Краснодарского края по математике (углубленное изучение предмета в школе). Активно участвовал в семинарах по обсуждению концепции математического образования в РФ.

Научное руководство: 6 студентов на 3 курсе, 2 студента на 4 курсе (выпускной бакалавриат), 1 студент на 5 курсе (выпускной специалитет), 1 магистрант 1 года обучения, 1 магистрант 2 года обучения (выпускной).

Веду разнообразные занятия (лекции и семинары) в магистратуре и бакалавриате. Занимаюсь дополнительной кружковой работой со школьниками и студентами. Веду научно-учебные семинары для преподавателей и студентов физико-математических факультетов университета.

Дипломная работа «Математические модели в элементарной теории радуги» выпускницы математического факультета КубГУ Т.А.Киричек, защищенная под моим руководством 19 июня 2013г., была признана лучшей на факультете.

Благодаря поддержке фонда «Династия» стало возможным начать работу над научным наследием кафедры теории функций математического факультета Кубанского государственного университета. В рамках этого проекта планируется подготовить к переизданию научные труды кафедры, а также дополнить и расширить их. К настоящему времени уже подготовлено к переизданию учебное пособие, написанное основателем кафедры д.ф.-м.н., профессором Игорем Петровичем Митюком «Применение симметризационных методов в геометрической теории функций», изданного на кафедре в 1985 году (95 страниц). Примерный страничный объем проекта составляет 500 страниц.

Итог деятельности за 3 года. (жюри просит кратко подвести итог трех лет, сравнить заявку с достигнутыми результатами, отметить, что получилось, а что нет.)

Моя научная программа на три года состояла из трех разделов:

1. Анализ сингулярных множеств слабых решений системы Навье-Стокса.
2. Классическое решение двумерного уравнения Эйлера.
3. Проблемы турбулентности.

Не в полной мере, и не совсем то, что планировалось с самого начала, но прогресс получился по пунктам 1 и 3.

Продвижения по первому пункту описаны на первой странице этого отчета.

В рамках продвижений по третьему пункту, получены простые строгие математические утверждения, связывающие подходы Колмогорова (1941г.) и Обухова (1941г.) к теории турбулентности. Раннее эти факты были известны лишь на физическо-эвристическом уровне строгости. (см. отчет за 2012 год).

Получен ряд продвижений вне рамок заявленной научной программы, что отражено в отчетах за 2011, 2012 и 2013 годы.