ОТЧТ ПО КОНКУРСУ ФОНДА «ДИНАСТИЯ» ЗА 2013 ГОД

АЛЕКСЕЙ ЕЛАГИН

Полученные результаты

Мной был исследован вопрос о линеаризации триангулированных категорий относительно действия группы. Была построена конструкция триангулированной линеаризованной категории при условии, что имеется действие группы на оснащении исходной триангулированной категории.

Гомологический подход в геометрии алгебраических многообразий подразумевает, что важным объектом изучения должна быть производная категория когерентных пучков $\mathcal{D}^b(X)$ на многоообразии X. Соответственно, желательно понимать, как различные геометрические понятия и конструкции выражаются на языке производных категорий. В частности, предположим, что конечная группа G действует на алгебраическом многообразии X. В этом случае можно рассмотреть фактормногообразие X/G, а также факторстек $X//G$, который совпадает с фактормногообразием в случае свободного действия. Полезно иметь способ построить категорию $\mathcal{D}^b(X/G)$ или $\mathcal{D}^b(X//G)$, исходя из категории $\mathcal{D}^b(X)$. Для абелевой категории когерентных пучков решением аналогичной задачи служит конструкция G-эквивариантного когерентного пучка: когерентные пучки на $X//G$ – это G-эквивариантные когерентные пучки на X. Для любой абелевой категории $\mathcal{C}$ с действием группы G можно определить категорию $\mathcal{C}^G$ G-эквивариантных объектов в $\mathcal{C}$, она также будет абелевой. Если в качестве $\mathcal{C}$ взять $\mathrm{coh}(X)$, то $\mathcal{C}^G$ будет эквивалентна $\mathrm{coh}(X//G)$.

С аналогичной конструкцией для триангулированных категорией имеются проблемы: а именно, в случае действия группы G на триангулированной категории $\mathcal{T}$ категория $\mathcal{T}^G$, состоящая из G-эквивариантных объектов в $\mathcal{T}$, априори не обязана быть триангулированной. Это одно из проявлений недостаточной жёсткости триангулировнных категорий, приводящей и ко многим другим трудностям. Целью работы было построить «линеаризованную» триангулированную категорию, играющую роль $\mathcal{T}^G$.

Это удалось сделать в следующих предположениях: существует DG-оснащение $\mathcal{A}$ данной триангулированной категории $\mathcal{T}$, на котором имеется действие G, индуцирующее данное действие на $\mathcal{T}$. В этих условиях, исходя из DG-категории $\mathcal{A}$ и действия группы G на ней, была построена DG-категория $\mathcal{B}$, для которой $H^0(\mathcal{B})$ – искомая триангулированная категория. Эта конструкция – уточнение конструкции, предложенной П. Сосной в «Linearisations of triangulated categories with respect to finite group actions», arXiv:11082144. Категория $\mathcal{B}$ обладает разумными функториальными свойствами, в частности, замена оснащения $\mathcal{A}$ на квазиэквивалентное приводит к замене $\mathcal{B}$ на квазиэквивалентную категорию.

В действительности, имеем $H^0(\mathcal{B}) \cong \mathcal{T}^G$. Тем самым показано, что в случае существования DG-оснащения $\mathcal{T}$, совместимого с действием группы, категория эквивариантных объектов в $\mathcal{T}$ является триангулированной. Для случая действия конечной группы G на алгебраическом многообразии X и $\mathcal{T} = \mathcal{D}^b(X)$, условие существования такого оснащения выполнено. Построенная категория $H^0(\mathcal{B}) \cong \mathcal{T}^G$ в этом случае эквивалентна $\mathcal{D}^b(X//G)$.

Другой пример применения полученного результата – накрытия, связанные с линейными расслоениями конечного порядка в группе Пикара. Если $\mathcal{L}$ – такое расслоение на многообразии X и $\mathcal{L}^n \cong \mathcal{O}_X$, то подкрутка на $\mathcal{L}$ определяет действие группы $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на категории $\mathcal{T} = \mathcal{D}^b(X)$. Снова существует DG-оснащение $\mathcal{T}$, согласованное с действием группы, поэтому категория $\mathcal{T}^G$ триангулированна. В этом случае категория $\mathcal{T}^G$ эквивалентна производной категории когерентных пучков на неразветвлённом накрытии X, связанном с $\mathcal{L}$.

Стоит признать, что конструкция линеаризованной триангулированной категории с DG-оснащением, как и другие результаты, полученные мной за прошедшие три года (теорема об обращении для эквивариантных категорий относительно действия абелевых групп, описание производной категории аффинной этальной схемы над базой), относятся к теории спуска для триангулированных категорий, работы по которой не были включены в мою заявку. Существенных же результатов по темам из заявки получено пока не было.

Участие в научных конференциях

[1] International Conference dedicated to the 90th anniversary of I.R.Shafarevich, Moscow, 2013, June 3-5.

[2] International Conference "Geometry of algebraic varieties" dedicated to the memory of V.A.Iskovskikh, Moscow, 2013, October 22-25.

[3] Christmas meetings with Pierre Deligne, Moscow, 2013, January 8-11.
Talk "Coherent sheaves on 1-dimensional stacks"

Преподавание

[1] Algebraic geometry - 1. Independent University of Moscow & MIPT, III year students/master students, September-December 2013, 2 hours per week.

Program:

(1) Commutative rings, ideals, prime and maximal ideals. Quotient-rings. Radical of a ring. Intersection and sum of ideals. Null-radical. Integral domains.
(2) Spectrum of a ring, Zariski topology.
(3) Ring homomorphisms, contraction and extension of ideals, of prime ideals. The induced morphism on spectra.
(4) Affine algebraic varieties, subvarieties, regular mappings. Correspondence between algebraic and geometric points of view.
(5) Points of variety and maximal ideals, residue field. Nullstellensatz.
(6) Finite field extensions. Algebraic elements, their minimal polynomials.
(7) Finite fields.
(8) Modules. Submodules and quotient-modules. Direct sums. Kernels, theorems on homomorphism, Chinese remainder theorem.
(9) Tensor product of modules. Universal bilinear map.
(10) Exact sequences. Hom and tensor product as functors. Projective and injective modules. Exact functors.
(11) Quotient field of a ring. Rational functions, functions regular on a subvariety. Localization of rings. Ideals behavior under localization.

(12) Localization of modules. Localization as exact functor. Local properties of rings and modules.
(13) Finitely generated modules. Noetherian rings and modules. Hilbert's basis theorem.
(14) Integral and finite extensions of rings. Rings of algebraic integers. Finite coverings of varieties. Fibers of finite morphisms of spectra.
(15) Primary ideals and primary decomposition. Primary decomposition in 1-dimensional domains. Dedekind domains.

Topics of exercise sheets:

(1) Rings and ideals
(2) Spectrum of a ring
(3) Homomorphisms of rings
(4) Affine algebraic varieties
(5) Finite fields
(6) Field extensions
(7) Modules
(8) Exact sequences
(9) Localization
(10) Modules - 2
(11) Finite ring extensions

See *http://ium.mccme.ru/f13/elagin-f13.html* for the lecture drafts and exercise sheets.