

**ОТЧЕТ О НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ  
ПО ГРАНТУ ФОНДА «ДИНАСТИЯ» (КОНКУРС 2010 Г.)  
ЗА 2013 Г.**

ПАНОВ ТАРАС ЕВГЕНЬЕВИЧ

1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В 2013 Г.

Продолжено изучение топологии, комплексной и лагранжевой геометрии многообразий с действием тора, в соответствии с 3 основными направлениями, заявленными в проекте. Изучены мероморфные функции, дивизоры и общие аналитические подмножества для некэлеровых комплексно-аналитических структур общего положения на момент-угломногообразиях. Получена новая конструкция гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий в торических многообразиях (в частности, в комплексном проективном пространстве).

1. Комплексная структура на момент-угол-многообразии  $\mathcal{Z}$  задаётся набором данных, включающих полный симплицальный веер. В случае, когда этот веер является рациональным, возникает голоморфное расслоение  $\mathcal{Z}$  над торическим многообразием со слоем комплексный тор. Изучение этого расслоения привело к описанию кольца когомологий Дольбо и вычислению чисел Ходжа в работе 2012 г. Дальнейшему исследованию комплексной геометрии момент-угол-многообразий посвящена работа [PUV] Вербицкого, Панова и Устиновского. В общем случае (когда задающий комплексную структуру веер не является рациональным) голоморфное расслоение комплексного момент-угол-многообразия  $\mathcal{Z}$  над торическим многообразием заменяется на голоморфное *слоение*  $\mathcal{F}$  с  $(\mathbb{C}^\times)^m$ -действием, транзитивным в трансверсальном направлении. Построены трансверсально кэлеровы метрики на момент-угол-многообразиях. Доказано, что все кэлеровы подмногообразия в момент-угол-многообразии общего положения лежат в комплексном торе, содержащемся в листе слоения  $\mathcal{F}$ . Для комплексной структуры общего положения доказано, что все комплексные подмногообразия являются момент-угол-многообразиями меньшей размерности (в частности, их лишь конечное число). Это влечёт, что алгебраическая размерность многообразия  $\mathcal{Z}$  равна нулю.

2. В работе Миронова и Панова [МП1] изучена топология гамильтоново-минимальных ( $H$ -минимальных) лагранжевых подмногообразий  $N$  в  $\mathbb{C}^m$ , построенных по пересечениям вещественных квадрик в работе Миронова.  $H$ -минимальность является симплектическим аналогом понятия минимального подмногообразия в римановой геометрии. В общем случае конструкция Миронова даёт погружённое  $H$ -минимальное подмногообразие, и в [МП1] получен критерий вложения, устанавливающий связь с известной

конструкцией Дельзанта гамильтоновых торических многообразий. Построены новые примеры  $H$ -минимальных подмногообразий с достаточно сложной топологией: например, пространство расслоения над  $T^3$  со слоем риманова поверхность рода 5. Дальнейшее обобщение данной конструкции было использовано в [МП2] для построения  $H$ -минимальных лагранжевых подмногообразий в торических многообразиях (в частности, в комплексном проективном пространстве, что обобщает серии известных примеров торов Клиффорда и др.).

3. Результатам о геометрических структурах на момент-угломногообразиях посвящён обзор Панова [Па]. Кроме того, продолжена работа над монографией “Toric Topology” [BP] (совместно с В. М. Бухштабером), которая планируется к выходу в издательстве Американского Математического Общества в 2014 г. В настоящее время подготовлены главы 1–7 и 9.

## 2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ.

Опубликовано в печатных рецензируемых журналах (3):

[МП1] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов. *Пересечения квадрик, момент-угломногообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения*. Функциональный анализ и его прил. **47** (2013), вып. 1, стр. 47–61.

[МП2] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов. *Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях*. Успехи математических наук **68** (2013), вып. 2, стр. 203–204.

[Па] Т. Е. Панов. *Геометрические структуры на момент-угломногообразиях*. Успехи математических наук **68** (2013), вып. 3, стр. 111–186.

Электронный препринт (подано в журнал) (1):

[PUV] Taras Panov, Yuri Ustinovsky and Misha Verbitsky. *Complex geometry of moment-angle manifolds*. Preprint (2013); arXiv:1308.2818.

Монография (1):

[BP] V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Toric Topology*. arXiv:1210.2368 В настоящее время подготовлены главы 1–7 из 9.

## 3. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ И ШКОЛАХ.

**4–7 декабря 2013.** Международная конференция “Геометрия и анализ на метрических структурах”, Новосибирск; пленарный доклад “Intersections of quadrics and Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds”.

**2–7 сентября 2013.** Открытая российско-китайская конференция “Torus actions: Topology, Geometry, Number Theory”, Хабаровск; пленарный доклад “Homotopy theory of moment-angle complexes”.

**28–31 августа 2013.** Международная конференция “Дни геометрии в Новосибирске. 2013”, Новосибирск; пленарный доклад.

**8–12 июля 2013.** International Conference on Algebraic and Geometric Topology, Chern Institute, Nankai University, Tianjin, China; plenary talk “Complex geometry and toric topology”.

**1–6 июля 2013.** Workshop on Algebraic Topology; Capital Normal University, Beijing, China; colloquium talk “Geometric structures on moment-angle manifolds”.

**8–11 января 2013.** Рождественские математические встречи фонда «Династия», НМУ, Москва; talk “Гомотопический тип момент-угол-комплексов”.

#### 4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

Являюсь руководителем российской группы совместного российско-китайского гранта РФФИ–Академия Наук Китая 13-01-91151-ГФЕН «Действия торов: топология, геометрия и теория чисел» и членом российской группы совместного российско-японского гранта РФФИ–JSPS 12-01-92104-ЯФ «Топология и геометрия действий тора и комбинаторика пространств орбит».

#### 5. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ.

Профессор механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

**Весна 2013 г.:** лекции «Линейная алгебра и геометрия» на механико-математическом факультете (1 курс) Казахстанского филиала МГУ (г. Астана); специальный курс «Торическая топология и приложения» (совместно с В.М. Бухштабером и А.А. Гайфуллиным) для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по геометрии и топологии.

**Осень 2013 г.:** специальный курс «Характеристические классы и когомологические операции» (совместно с В.М. Бухштабером и А.А. Гайфуллиным) для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по геометрии и топологии.

Осуществляю научное руководство 2 аспирантами (Лимонченко Иван, Устиновский Юрий) и 3 студентами 3–5 курсов.

#### 6. ИТОГ 3 ЛЕТ.

В исходной заявке были обозначены следующие 3 направления в рамках исследований геометрии и топологии момент-угол-многообразий.

**[Топология]** Продолжить изучение топологии момент-угол-многообразий и комплексов. Используя методы теории гомотопий (высшие произведения Уайтхеда), получить описание гомотопического и топологического типа  $\mathcal{Z}_P$  для ряда важных серий многогранников; в частности, для многогранников, приводящих к *неформальным* многообразиям  $\mathcal{Z}_P$ .

**[Комплексная геометрия]** Изучить инварианты некэлеровых комплексных структур на момент-угол-многообразиях  $\mathcal{Z}_K$ , в частности в случае, когда  $K$  не происходит из многогранника. Описать мультипликативную структуру когомологий Дольбо  $\mathcal{Z}_K$  и вычислить числа Ходжа. Изучить топологические следствия данного вычисления.

**[Лагранжева геометрия]** Пересечения вещественных квадратик в  $\mathbb{C}^m$  были отправной точкой в конструкции А. Миронова минимальных и гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий в  $\mathbb{C}^m$ . Так как те же пересечения квадратик приводят к момент-угол-многообразиям, наши результаты об их топологии открывают путь к построению минимальных лагранжевых подмногообразий с достаточно сложной топологией, а также к лучшему пониманию геометрии соответствующих лагранжевых вложений.

В первом направлении в работе *Jelena Grbic, Taras Panov, Stephen Theriault and Jie Wu, Homotopy types of moment-angle complexes; arXiv:1211.0873* (см. отчёт за 2012 г.) получено описание класса флаговых симплицальных комплексов  $K$ , для которых соответствующий момент-угол-комплекс  $\mathcal{Z}_K$  имеет гомотопический тип букета сфер. Критерий выглядит следующим образом: кольцо граней  $K$  должно быть кольцом Голода, или, эквивалентно, одномерный остов комплекса  $K$  должен быть хордовым графом (это понятие играет важную роль в комбинаторных аспектах теории оптимизации на графах). Также явно вычислено количество сфер данной размерности в букете. В случае букета сфер пространства петель на  $\mathcal{Z}_K$  и  $DJ(K)$  гомотопически эквивалентны произведению сфер и петель на сферах; при этом показано, что каноническое отображение  $\mathcal{Z}_K \rightarrow DJ(K)$  описывается итерированными произведениями Уайтхеда двумерных сферических классов. В общем случае описан минимальный набор мультипликативных образующих алгебры Понтрягина (гомологий петель)  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K)$ .

Однако в общем случае (когда симплицальный комплекс  $K$  не является флаговым и тем самым возникают высшие произведения Уайтхеда) описать класс комплексом  $K$ , для которых  $\mathcal{Z}_K$  является букетом сфер, пока не удаётся.

Следующим шагом является описание комплексов  $K$ , для которых кольцо граней  $\mathbb{Z}[K]$  является минимально не-Голодовым. Имеется предположение, что все соответствующие момент-угол-многообразия диффеоморфны связной сумме произведений сфер. Данный вопрос исследуется в настоящее время моим аспирантом Лимонченко.

По второму направлению задачи, в основном, выполнены. Опубликована работа *Taras Panov and Yuri Ustinovsky, Complex-analytic structures on moment-angle manifolds, Moscow Math. J. 12 (2012), no. 1, 149–172* и подготовлен препринт [PUV] (см. отчёт за 2012 г. и раздел 1 данного отчёта). Здесь возникло много новых интересных задач, исследования продолжаются. То же касается и третьего направления.

*E-mail address:* tpanov@mech.math.msu.su

<http://higeom.math.msu.su/people/taras/>