Протасов Владимир Юрьевич

Отчет по гранту фонда Династия за 2013 год

и краткие итоги за три года

Результаты, полученные в этом году

В 2013 году я занимался задачами, связанными с устойчивостью линейных систем с переключениями, с вычислением совместного спектрального радиуса и показателя Ляпунова линейных операторов, с классификацией примитивных семейств неотрицательных матриц, а также с методами максимизации/минимизации спектрального радиуса на множествах матриц, имеющих специальную структуру. Из полученных результатов выделим следующие:

1. Оптимизация спектрального радиуса. Проблема минимизации/максимизации спектрального радиуса на заданном множестве матриц известна своей сложностью. В общем виде она формулируется так: дано компактное множество $\mathcal{M}$, состоящее из $d \times d$-матриц, необходимо найти матрицы $A_+, A_- \in \mathcal{M}$, имеющие, соответственно, наибольший и наименьший спектральный радиус. Напомним, что спектральный радиус матрицы – это наибольший из модулей её собственных значений. Эта задача широко изучалась в литературе в связи с приложениями в теории графов, дифференциальных уравнениях, математической физике и т.д. Эффективно она может решаться лишь для некоторых классов множеств $\mathcal{M}$. Один из таких классов был рассмотрен в нашей совместной работе с Ю.Е.Нестеровым [5]. Это семейства неотрицательных матриц, в которых i-тая строка выбирается независимо от остальных из заданного компактного множества $X_i \subset \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, d$. Для таких классов нами было разработано два эффективных метода оптимизации спектрального радиуса. В частности, если все множества X_i – многогранники, то задача может быть решена точно, и соответствующий алгоритм является некоторым аналогом симплекс-метода. Если все X_i – евклидовы шары, то оптимальные матрицы A_+, A_- находятся в явном виде. Построенные методы применимы к задачам об оптимизации спектра графа, а также в задаче об оптимизации производственной матрицы в модели Леонтьева.

2. Устойчивость линейных систем с переключениями. Линейной системой с переключениями называется система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $t \in [0, +\infty)$, где $x(t) \in \mathbb{R}^d$, и матрица $A(t)$ может принимать значения на заданном компактном множестве $d \times d$-матриц $\mathcal{U}$. Система называется устойчивой, если для любой измеримой функции $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathcal{U}$ имеем $x(t) \to 0$, $t \to \infty$, т.е., все траектории системы стремятся к нулю. Существует обширная литература по устойчивости систем с переключениями, начиная с работ Молчанова, Пятницкого, Рапоппорта, Гурвица, и др. В работе [11] мы предлагаем новый подход к доказательству устойчивости, основанный на идее последовательного построения экстремального многогранника системы, определяющего соответствующую кусочно-линейную функцию Ляпунова. Отметим, что идея использования кусочно-линейных функций Ляпунова не нова, она появилась в 1990-х гг. в работах Бланкини и Миани. Новым в нашей работе является конструктивный метод построения таких многогранников для заданных систем и оценка на скорость его сходимости. При построении экстремального многогранника мы существенно использовали результаты нашей совместной работы с Н.Гуглиелми [2], где подобная идея была успешно применена к вычислению совместного спектрального радиуса матриц. Проведенные численные эксперименты показывают, что метод экстремального многогранника работает более эффективно, чем известные в литературе методы определения устойчивости матриц, при этом размерность матриц может быть относительно высока (до 10).

3. Одноранговые коррекции неотрицательных матриц. Приложения к задачам популяционной динамики. Одноранговой коррекцией матрицы A называется прибавление к ней матрицы ранга 1. Известно, что одноранговая коррекция неотрицательной матрицы может сколь угодно сильно увеличить ее максимальное собственное значение λ_1. В работе [10] (совм. с Д.О.Логофетом) мы исследовали вопрос о величине второго положительного собственного значения λ_2. Основным результатом является следующая теорема: *если A, B – неотрицательные матрицы, и* $\mathrm{rank}(A - B) = 1$, *то матрица B имеет не более одного, с учетом кратности, собственного значения на луче* $(\lambda_1(A), +\infty)$. Иными словами, никакая одноранговая коррекция не может сделать второе собственное значение больше спектрального радиуса начальной матрицы. Из этого, в частности, следует, что для одноранговой коррекции стохастической матрицы всегда имеем $\lambda_2(B) \le 1$. Этот результат был нами применен для доказательства индикаторного свойства специальной функции, введенной ранее Д.О.Логофетом для задач популяционной динамики.

4. Классификация k-примитивных семейств матриц. Неотрицательная матрица называется *примитивной*, если некоторая ее степень положительна. Примитивные матрицы наследуют ряд важных свойств положительных матриц: сингулярность наибольшего собственного значения, сходимость нормированных степеней к собственному вектору, и т.д. Поэтому примитивные матрицы широко используются в теории марковских цепей, комбинаторике, теории графов, теории функциональных уравнений со сжатием аргумента, и т.д. При исследовании марковских цепей с k-мерным временем возникает следующий аналог понятия примитивности для семейств матриц. Если $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ – произвольное семейство неотрицательных матриц, то для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ гурвицевым произведением $\mathcal{A}^\alpha$ называется сумма всевозможных произведений матриц семейства $\mathcal{A}$, содержащих ровно α_i сомножителей A_i, $i = 1, \ldots, k$. Семейство $\mathcal{A}$ называется k-примитивным, если для него существует хотя бы одно положительное гурвицево произведение. Такие семейства изучались в литературе, в частности, в работах Форназини, Валкер, Олески, Шадера, Ван-Дрисче, и т.д. В работе [3] нами доказана следующая теорема, дающая критерий k-примитивности: *семейство стохастических матриц* $\mathcal{A}$ *не является* k*-примитивным, тогда и только тогда когда существует разбиение базиса пространства* $\mathbb{R}^d$ *на несколько подмножеств, на котором данные матрицы действуют как коммутирующие между собой перестановки.* С помощью этого результата доказывается полиномиальная разрешимость задачи определения k-примитивности. Соответствующий алгоритм распознает k-примитивность заданного семейства матриц за не более, чем $O(kd^3 + k^2d^2)$ операций.

Работы, опубликованные и поданные в печать в 2013 г.

Опубликованные

1. В.Ю.Протасов, *Асимптотика произведений неотрицательных случайных матриц*, Функц. анализ и его прил., 47 (2013), no. 2, 68-79.

2. N.Guglielmi and V.Yu.Protasov, *Exact computation of joint spectral characteristics of linear operators*, Found. Comput. Math., 13 (2013), no. 1, 37-97.

3. V.Yu.Protasov, *Classification of k-primitive sets of matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 34 (2013), no. 3, 1174-1188.

4. В.Ю.Протасов, *Липшицева устойчивость операторов в банаховых пространствах*, Тр. МИАН, 280 (2013), 275–287.

5. Y.Nesterov and V.Yu.Protasov, *Optimizing the spectral radius*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 34 (2013), no 3, 999-1013.

6. V.Yu.Protasov and R.Jungers, *Lower and upper bounds for the largest Lyapunov exponent of matrices*, Linear Algebra Appl., 438 (2013), 4448-4468.

7. V.Yu.Protasov, R.Jungers, *Convex optimization methods for computing the Lyapunov Exponent of matrices*, Proc. 2013 European Control Conference (ECC2013), Zurich (Switzerland), July 17-19, 2013, pp. 3191-3196.

Принятые

8. V.Yu.Protasov, R.Jungers, *Is switching systems stability harder for continuous time systems?*, Proc. of 2013 IEEE 52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC2013), Firenza (Italy), December 10-13, 2013.

9. N.Guglielmi, L.Laglia, and V.Yu.Protasov, *Polytope joint Lyapunov functions for positive LSS*, Proc. of 2013 IEEE 52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC2013), Firenza (Italy), December 10-13, 2013.

Поданные

10. V.Yu.Protasov and D.O.Logofet, *Rank-one corrections of nonnegative matrices, with an application to matrix population models*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. (submitted)

11. N.Guglielmi, L.Laglia, and V.Yu.Protasov, *Polytope Lyapunov functions for stable and fok stabilizable LSS*, Found Comput. Math. (submitted)

12. C.Conti, M.Charina, N.Guglielmi, and V.Yu.Protasov, *On convergence of nonstationary subdivisions*, Applied Comput. Harmon. Anal. (submitted)

Участие в конференциях и школах

1. International conference "Fractals and Wavelets", Кочин (Индия), 9-16 ноября 2013 *(пленарный доклад) .*

2. Международная конференция "Нелинейные аппроксимации и приложения", посвященная 60-летию проф. В. Н. Темлякова (29 октября–01 ноября 2013 г.) *(приглашенный доклад).*

Работа в научных центрах и международных группах

University of L'Aquila (Аквила, Италия), февраль 2013.

Catholic University Louvain (Лоувайн-ля-Нёв, Бельгия), май 2013.

Работа в проекте "Research in pairs. Non-stationary subdivisions.", Обервольфах (Германия), март 2013.

Работа в редколлегиях журналов

член редколлегии журнала Математический Сборник

член редколлегии журнала Communications in Mathematics and Applications

член редколлегии журнала Квант

Оппонирование диссертаций

докторская диссертация И.А.Шейпака (мех-мат МГУ, декабрь 2012);
кандидатская диссертация А.В.Кудрявцева (мех-мат МГУ, март 2013),
кандидатская диссертация С.С.Свистунова (Уральский Фед. Ун-т, Екатеринбург, декабрь 2013)

Педагогическая деятельность

`Преподавание.`

Курс *"Вариационное исчисление и оптимальное управление"* (МГУ, мех-мат).

Со-руководитель двух спецсеминаров на мех-мате МГУ.

Участие в проведении мех-матовской студенческой олимпиады,
а также олимпиады кафедры ОПУ "Экстремальные задачи".

Мини-курс *"Структурная оптимизация или Чёрный ящик ?"*
(летняя школа "Современная математика" Дубна, июль (2013)).

Участие в работе V Традиционной школе "Информация, оптимизация, алгоритмы",
Сенеж, июнь (2013)

`Научное руководство.`

аспиранты:

Авксентьев Евгений, аспирантура мех-мата МГУ, 3 год,
Войнов Андрей, аспирантура мех-мата МГУ, 1 год,
Нилов Федор, аспирантура мех-мата МГУ, 1 год.

студенты:

Киселева Ольга (мех-мат МГУ, 5 курс);

`Работа со школьниками.`

Организация и работа в жюри геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина;
Работа в редколлегии журнала "Квант".
Лекции для школьников на Летней школе МФТИ.

Краткие итоги за три года

В течение последних трех я занимался различными задачами в рамках заявленной темы исследований "Совместные спектральные характеристики". За три года мною опубликованы 14 работ в научных журналах и одна монография, сделаны 9 докладов на международных конференциях (из них 6 – пленарные). В целом, удалось завершить построение единой теории совместных спектральных характеристик линейных операторов, разработать эффективные методы их вычислений и применить полученные результаты в ряде приложений. Не все пункты из плана исследований заявки 2011 г. удалось осуществить. С другой стороны, в нескольких пунктах результаты оказались сильнее ожидаемых. Ниже мы приводим краткие положения из плана и сравниваем их с фактическими результатами.

– разработать эффективные методы вычисления p-радиуса линейных операторов. Для совместного спектрального радиуса (случай $p = \infty$) и нижнего спектрального радиуса в работе [2] нами построен метод, который находит даже не приближенные, а точные значения этих величин и работает в относительно высоких размерностях. С другой стороны, для $p \in [1, +\infty)$ приемлемое решение удалось получить только для неотрицательных матриц (совм. с Р.Юнгерсом, *Fast algorithms for the p-radius computation*, SIAM J. Scient. Comput., 33 (2011) no 1, 1246-1266.)

– оценить показатели Ляпунова неотрицательных матриц, с привлечением антинорм вместо инвариантных норм. Данная идея оказалась продуктивной, она реализована нами в [6, 7].

– применить результаты Бургейна-Линденштраусса-Мильмана о приближени зоноидов зонотопами к построению инвариантных L_p-норм и к приближенному вычислению p-радиуса. Эту идею осуществить не удалось. Доказательство теоремы Бургейна-Линденштраусса-Мильмана неконструктивно и не дает способов построения приближающего зонотопа. Попытки получить конструктивное доказательство к успеху не привели.

планируется исследовать семейства неотрицательных матриц, у которых каждая строка независимо выбирается из заданного множества. Вычислять их совместный и нижний спектральные радиусы можно достаточно эффективно даже в случае больших размерностей, используя методы выпуклого программирования. Этот план нами успешно реализован в совместной с Ю.Е.Нестеровым работе [6].

Планируется получить окончательные решения задач об асимптотике числа неперекрывающихся слов и об асимптотике бинарной функции разбиения Эйлера. Именно, используя новые методы вычисления совместного и нижнего спектральных радиусов, предполагается найти точные значения показателей асимптотического роста. Первый пункт реализован, второй – частично. Задача об асимптотике числа неперекрывающихся слов полностью решена нами совм. с Н.Гуглиелми в [2]. Задача об асимптотике бинарной функции разбиения Эйлера с d цифрами решена в той же работе для всех $d \leq 100$.