# Отчёт по гранту фонда “Династия” за 2013 год

Максим Всемирнов

## 1. Результаты, полученные в 2013 году

Как и ранее, основное направление исследований было посвящено изучению гурвицевых (или $(2,3,7)$-порожденных) групп. Группа называется гурвицевой, если она может быть порождена парой элементов, скажем $x$ и $y$, удовлетворяющих соотношениям $x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1$. Завершена совместная с М.К.Тамбурини-Беллани работа, в которой исследовался случай гурвицевых подгрупп в $\mathrm{PSL}_6(\mathbb{F})$. При этом параметризованы все гурвицевы тройки матриц в $\mathrm{PSL}_6(\mathbb{F})$. Полная формулировка этого результата довольно громоздка, поэтому я ограничусь лишь следствием из него.

**Теорема.** Симплектические группы $\mathrm{PSp}_6(\mathrm{q})$ гурвицевы для всех нечетных $q \geq 5$.

Этот результат наилучший из возможных, так как ранее было известно, что группы $\mathrm{PSp}_6(2^m)$ и $\mathrm{PSp}_6(3)$ не гурвицевы.

Эта работа завершает цикл, посвященный матричным гурвицевым группам малых размерностей, над которым М.К.Тамбурини-Беллани и я работали с 2006 г. В настоящий момент известен полный список гурвицевых подгрупп в $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F})$ при $n \leq 7$. Работа представлена в журнал Communications in Algebra.

Кроме того в 2013 году я продолжил исследования по теории чисел.

Одно из направлений — это начатый ещё в 2012 году совместный проект с П.Саесом и К. Видо (университет Консепсьона), посвященный свойствам последовательностей Бюхи. Обобщенная последовательность Бюхи — это последовательность квадратов $a_1^2,\dots,a_n^2$, такая, что двукратное применение разностного оператора дает постоянную последовательность. Исходная задача Бюхи соответствует случаю, когда последовательность вторых разностей состоит из двоек. В частности, такая последовательность называется тривиальной, если её элементами являются последовательные квадраты, то есть $a_1^2 = x^2$, $a_2^2 = (x+1)^2,\dots,a_n = (x+n-1)^2$. Возникает естественный вопрос: какова может быть длина нетривиальной последовательности Бюхи? Изначально задача ставилась для кольца целых чисел, но она допускает естественное обобщение и на другие кольца. Даже в случае $\mathbb{Z}$ ответ не известен.

В нашей совместной работе с П.Саесом и К. Видо исследовались обобщённые последовательности Бюхи в кольцах $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. В частности, мы показали, как связаны максимальные длины нетривиальных последовательностей в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и в $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ и описали структуру нетривиальных последовательностей максимальной длины в $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, $k > 1$. В настоящее время завершается работа над текстом статьи.

Второе направление моих исследований по теории чисел связано с арифметическими свойствами биномиальных коэффициентов. В недавней работе [Some divisibility properties of binomial and $q$-binomial coefficients, *J. Number Theory* **135** (2013) 167–184] Гуо и Краттенталер изучали распределение остатков при делении биномиальных коэффициентов на простое число. В частности, они выдвинули следующую гипотезу.

**Гипотеза (Гуо—Краттенталер).** Пусть $a > b$ — положительные целые числа, а $\alpha$ и $\beta$ — целые. Кроме того, пусть $p$ — простое число, взаимно простое с $a$. Тогда для каждого $r = 0, 1, \ldots, p-1$ существует бесконечно много целых положительных $n$, таких, что

$$\binom{an+\alpha}{bn+\beta} \equiv r \pmod{p}.$$

Мне удалось показать, что эта гипотеза неверна для $p = 5$. Соответствующие контрпримеры описываются следующей теоремой.

**Теорема.** Пусть $p = 5$, $a = 4$, $b = 2$. Если $(\alpha, \beta) \in \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$, то

$$\binom{4n+\alpha}{2n+\beta} \equiv 0, 1 \text{ или } 4 \pmod{5}.$$

Если $(\alpha, \beta) \in \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$, то

$$\binom{4n+\alpha}{2n+\beta} \equiv 0, 2 \text{ или } 3 \pmod{5}.$$

Вопрос о справедливости гипотезы Гуо и Краттенталера для простых $p \geq 7$ остается открытым.

**2. Публикации**

Работы, опубликованные в 2013 году:

- V. L. Vasilyev, M. A. Vsemirnov. On the $(2,3)$-generation of symplectic groups of large rank. *Journal of Pure and Applied Algebra* 217 (2013), no.11, 2036–2049.
- M. Vsemirnov. On R. Chapman's "evil determinant": case $p \equiv 1 \pmod{4}$. *Acta Arithmetica* 159 (2013), no.4, 331–344.
- M. Vsemirnov. Short unitriangular factorizations of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$. *The Quarterly Journal of Mathematics*, doi:10.1093/qmath/has044, published online 7 Jan. 2013.

Работы, представленные в печать:

- M. Vsemirnov. On a conjecture of Guo and Krattenthaler. Представлена в *International Journal of Number Theory.*
- M. C. Tamburini Bellani M. Vsemirnov. Hurwitz generation of $\mathrm{PSp}_6(q)$. Представлена в *Communications in Algebra.*

Тексты в процессе подготовки.

- P. Saez, X. Vidaux, M. Vsemirnov. Optimal bounds for Büchi problem over $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- P. Saez, X. Vidaux, M. Vsemirnov. Büchi's problem over $\mathbb{F}_q$: counting.

## 3. Участие в конференциях, доклады на семинарах

- 8–10 января 2013. Рождественские встречи лауреатов фонда "Династия", МЦНМО, Москва. Тема доклада: "Гурвицевы группы и гурвицевы образующие".
- 16–20 июля 2013. Международная конференция по теории групп, посвященная 70-летию В.Д.Мазурова, ИМ СО РАН, Новосибирск. Тема доклада: "On (2,3)-generated groups". (Пленарный доклад.)
- 16–18 октября 2013. Международная конференция "Современные проблемы и перспективы науки и образования: математика", посвященная 50-летию со дня основания ФМШ №45 при ЛГУ. ПОМИ РАН, Санкт-Петербург. Тема доклада: "Задача Чапмена о зловещем определителе и числа классов квадратичных полей".

Доклады на семинарах:

- 2 мая 2013. Семинар факультета математики Католического университета, Брешия, Италия. Тема доклада: "R.Chapman's evil determinant problem and the Ankeny—Artin—Chowla conjecture".

## 4. Работа в научных центрах и международных группах

В 2013 году я продолжал совместные исследования с М.К.Тамбурини-Беллани из Католического университета (Брешия, Италия). В том числе эта работа включала мой визит в Католический университет продолжительностью 1 месяц (апрель 2013 г.).

Продолжена совместная заочная работа с коллективом в составе К. Видо и П. Саеса из университета г. Консепсьон (Чили).

## 5. Педагогическая деятельность

В 2013 году я продолжил преподавательскую деятельность на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. В весеннем семестре прочитан курс "Теория множеств и математическая логика" для студентов 1 курса ПОМИ-потока и спецкурс "Вычислительная теория чисел и криптография" для студентов 3–5 курсов. В осеннем семестре прочитан спецкурс "Тэта-функция, модулярные формы и комбинаторные тождества" для студентов 3–4 курсов.

## 6. Научно-организационная деятельность

Председатель оргкомитета и член программного комитета Петербургского этапа международной конференция "Современные проблемы математики, механики и математической физики", посвященной 150-летию со дня рождения В.А.Стеклова. ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, 16–17 мая 2013 г.

Редактор тома 414 "Записок научных семинаров ПОМИ" (серия "Теория представлений алгебр и групп").

Член диссертационного совета Д002.202.02.

**7. Экспертная деятельность**

В 2013 году я рецензировал две заявки, представленные на конкурс фонда "Династия", проводил экспертизу работы по запросу ФГБНУ НИИ РИНКЦЭ (Республиканский исследовательский научно-консультационный центр экспертизы), а также рецензировал статью в журнале Information Processing Letters.

**8. Основные итоги исследований, выполненных при поддержке фонда "Династия".**

Среди представленных в заявке задач, программа исследований по двум темам выполнена полностью. К ним относятся:

Тема 5. *Исследование* $(2,3)$*-порожденности матричных групп над различными кольцами.*

Найдены три новых примера не $(2,3)$-порожденных групп среди известных конечных простых групп. В цикле совместных работ с моим аспирантов В.Л.Васильевым для широкого класса колец $R$ доказана $(2,3)$-порожденность элементарных гиперболических симплектичеких групп $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ для достаточно больших $n$. В частности, получен положительный ответ на вопрос о $(2,3)$-порожденности групп $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ для почти всех $n$.

Тема 2. *Параметризация матричных гурвицевых образующих в малых размерностях и классификация соответствуюших групп.*

В цикле совместных с М.К.Тамбурини-Беллани работ завершена классификация гурвицевых подгрупп в $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F})$, $n \leq 7$. Имеются частичные результаты при $n = 8$, но этот случай требует дальнейшего изучения.

По теме 3 (*Гипотеза Холта—Плескена и теоретико-числовые проблемы, связанные с гурвицевыми группами*) подготовлен предварительный черновой вариант текста. В этой работе вопрос Холта—Плескена сведен к изучению примитивных делителей некоторой рекуррентной последовательности, определенной над кубическим полем. Соответствующая теоретико-числовая задача решена полностью. Ожидается, что в ближайшее время после аккуратной проверки всего текста, рукопись будет подана в печать.

Тема 1 (*Нахождение явных гурвицевых образующих для классических матричных групп промежуточных рангов*) исследовалась лишь частично. В настоящий момент имеются конкретные предложения о том, какой должна быть структура дальнейшей работы, но о какой-либо завершенности говорить еще слишком рано.

Еще две темы
Тема 4. *Исследование дальнейших соотношений между гурвицевыми образующими для групп* $G_2(p)$, $p \geq 5$.
Тема 6. *Исследование* $(k,l,m)$*-порожденных матричных групп.*

за минувшие три года оказались вне рамок основных исследований, в основном, из-за недостатка времени.

Помимо заявленных тем, исследования велись и в других направлениях. Среди моих результатов 2011–2013 гг., не имеющих непосредственного отношения к теме заявки, я бы выделил следующие:

- Доказано, что всякая матрица из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ раскладывается в произведение не более пяти треугольных матриц с коэффициентами иэ $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Ранее подобные результаты (но с большим числом сомножителей) были известны лишь в предположении обобщенной гипотезы Римана.

- Доказаны две гипотезы Чапмена о значении определителей матриц, составленных из символов Лежандра. В одном из случаев установлена связь этих определителей с арифметическими инвариантами вещественных квадратичных полей. Этот цикл работ интересен еще и тем, что дает новый подход к до сих пор недоказанной гипотезе Анкени—Артина—Чоулы.

- Изучены свойства обобщенных последовательностей Бюхи.

- Получен контпример к одной гипотезе Гуо и Краттенталера о свойствах биномиальных коэффициентов.