Отчет Жгуна В.С. для фонда Династия. 2013 год.

Научная работа 2013.

Симплектические многообразия играют фундаментальную роль в современной алгебраической геометрии и математической физике. Исследования последних 20 лет показали тесную связь G-бирациональных инвариантов вложений однородных пространств для редуктивной группы G и симплектической геометрии их кокасательных расслоений. Одним из примечательных результатов последних лет была теорема Д.И.Панюшева (1999), которая утверждает, что для G-многообразия X и его G-инвариантного подмногообразия Y сложность и ранг конормального расслоения к Y в X равны соответственно сложности и рангу X. Напомним, что для многообразия X сложность - это коразмерность типичной орбиты в X борелевской подгруппы B в G, а ранг - это ранг решетки характеров B-полуинвариантных функций на X. В связи с этой теоремой Панюшев высказал гипотезу о том, что в кокасательном расслоении к G-многообразию X ранг и сложность G-инвариантного лагранжева подмногообразия равны рангу и сложности X соответственно (отметим, что конормальное расслоение к инвариантному подмногообразию в X как раз является примером инвариантного лагранжева подмногообразия в кокасательном расслоении). Ранее автором проекта совместно с Д.А.Тимашевым вышеупомянутая гипотеза была сформулирована в большей общности, чем это было сделано самим Панюшевым. А именно, пусть M - симплектическое многообразие, снабженное отображением моментов, тогда все G-инвариантные лагранжевы подмногообразия в M имеют одинаковую сложность и ранг. Более того, разумно высказать гипотезу о том, что сложность и ранг G-инвариантного лагранжева подмногообразия могут быть выражены через симплектические инварианты M, а именно через коранг и дефект. Напомним, что корангом симплектического многообразия M называется ранг ограничения симплектической формы на косоортогональное дополнение к касательному пространству к общей G-орбите в M, а дефектом называется размерность ядра ограничения симплектической формы на касательное пространство к общей G-орбите в M. Отметим также, что эти инварианты могут быть выражены через размерность образа отображения моментов и размерность рационального фактора этого образа по группе G. Напомним, что в работе В.С.Жгуна и Д.А.Тимашева “Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями,” опубликованной в Докладах Российской Академии наук в 2012 году, мы доказали эту гипотезу в случае, когда инвариантные лагранжевы подмногообразия являются квазиаффинными (или более обще невырожденными в терминологии Ф.Кнопа). В этой статье нами был предложен метод доказательства обобщенной гипотезы Панюшева, базирующийся на деформации симплектической структуры к симплектической структуре на нормальном расслоении к лагранжевому подмногообразию. Это нормальное расслоение естественно отождествляется с кокасательным расслоением, а симплектическая структура оказывается стандартной. Существенным шагом в доказательстве являются результаты Кнопа об эквивариантной структуре кокасательного расслоения для квазиаффинных (или более обще невырожденных по Кнопу многообразий). Это результаты, описывающие образ отображения моментов, а также результаты, описывающие образ отображения моментов к конормальному расслоению к типичным орбитам максимальной унипотентной подгруппы U группы G. Однако, эти результаты не обобщаются дословно. Это повлекло то, что в работе 2012 года мы наложили на инвариантные лагранжевы подмногообразия условия квазиаффинности. В настоящем этапе проекта мы сделали попытку убрать ограничительное условие квазиффинности G-инваринтного лагранжева подмногообразия. Если описание замыкание образа отображения моментов сохраняется для квазипроективных G-многообразий (однако, доказательство, принадлежащее Кнопу использует весьма нетривиальную технику дифференциальных операторов), то результаты, описывающие образ отображения моментов конормального расслоения к типичным орбитам максимальной унипотентной подгруппы U группы G, перестают быть верными (контрпример дают многообразия флагов). Мы построили семейство U-орбит максимальной сложности и ранга, и описали образ отображения конормального расслоения этого семейства. Отличительной особенностью этого конормального расслоения является то, что его G-разнесение плотно в кокасательном расслоении (в отличие, от G разнесения конормального расслоения к семейству общих U-орбит). Также из этих результатов легко получить описание замыкания образа отображения моментов для всего кокасательного расслоения (это дает новое доказательство этого результата с помощью чисто геометрических методов). Эти результаты были опубликованы в статье Zhgoon V. S. On the Local Structure Theorem and equivariant geometry of cotangent bundles // Journal of Lie Theory. 2013. Vol. 23. Результаты, относящиеся к семействам необщих U-орбит, являются основным шагом в общей схеме доказательства обобщенной гипотезы Панюшева. Основываясь на этих результатах мы можем реализовать эту схему и закончить доказательство гипотезы в полной общности. Эти результаты вошли в препринт “Hamiltonian actions on symplectic varieties with invariant Lagrangian subvarieties”. preprint arXiv:1109.5239, и скоро будут подготовлены к печати в рецензируемом журнале.

Также одной из важных областей исследований эквивариантной геометрии кокасательных расслоений является исследование малой группы Вейля. Ф.Кнопом было доказано, что малая группа Вейля порождена отражениями. Основным этапом его доказательства, основанного на топологических идеях, связанных с фундаментальной группой кокасательного расслоения, был результат о равноразмерности фактор-отображения моментов для кокасательного расслоения. Мы получили важное обобщение этого результата на симплектические многообразия с инвариантными Лагранжевыми подмногообразиями. Мы надеемся применить этот результат для исследования малой группы Вейля симплектических многообразий.

Сравнение полученных результатов с ожидаемыми результатами, указанными в заявке.

Результаты об эквивариантной геометрии кокасательного расслоения были полностью реализованы. Было построено многообразие вырожденных орисфер, а также каноническое рациональное накрытие кокасательного расслоения с помощью кокасательного расслоения к многообразию вырожденных орисфер, группой Галуа которого является малая группа Вейля введенная, ранее Кнопом (1990) другим способом. Также был исследован образ отображения моментов конормального расслоения к семейству вырожденных орисфер. С помощью этого описания было дано описание образа отображения моментов для кокасательного расслоения. Хотя описание было известно ранее, однако теперь доказательство не использует дифференциальные операторы (в отличие от первоначального доказательства Кнопа 1990 года).

Что касается гипотезы Панюшева, то она была доказана даже в большей общности, чем была заявлена. Теперь формулировка соответствующей теоремы выглядит следующим образом: *Пусть M - симплектическое многообразие, снабженное отображением моментов, тогда все G-инвариантные лагранжевы подмногообразия в M имеют одинаковую сложность и ранг, которые равны половине коранга и дефекту соответственно.*

Список публикаций 2011-2013

1. Zhgoon V. S. On the Local Structure Theorem and equivariant geometry of cotangent bundles// Journal of Lie Theory. 2013. Vol. 23. 607-638.

2. В. П. Платонов, В. С. Жгун, М. М. Петрунин “К вопросу о простоте якобианов кривых рода 2 над полем рациональных чисел с точками кручения больших порядков.”// Доклады РАН том 450, № 4, 2013, С. 385-388.

3. В.С.Жгун (совместно с Д.А.Тимашевым) Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями. Доклады РАН 85:2 (2012) .418-421

4. Препринт V.S.Zhgoon (joint work with D.A.Timashev) “Hamiltonian actions on symplectic varieties with invariant Lagrangian subvarieties”. preprint **arXiv:1109.5239**

Список докладов.

Конференции

1) Рождественские математические встречи фонда "Династия" НМУ, Москва. “On generation of the little Weyl group by reflections and products of orthogonal reflections”
Семинары

2). Семинар Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений “Группы порожденные отражениями. Теорема Вальдшпургера.” ВШЭ, Москва.

3) Семинар Группы и алгебры Ли “Почему малая группа Вейля порождена отражениями.” МГУ, Москва.

Преподавание 2013 г.

Программа Math in Moscow курсы:

1) Math in Moscow Топология 1 (лекции и семинары) весна 2013
2) Math in Moscow Введение в коммутативную и гомологическую алгебру, осень 2013
3) ВШЭ Алгебраическая геометрия, осень 2013