

Отчёт для фонда Династия 2013 год

Зыкин А. И.

1 Результаты, полученные в этом году

Основным направлением исследований было изучение асимптотических проблем над числовыми и функциональными полями. Изучались следующие основные задачи:

Границы на число классов функциональных полей

Проблема оценки числа точек на Якобианах кривых над конечными полями (т.е. числа классов функциональных полей) хорошо известна. Оценки Вейля, соответствующие гипотезе Римана для кривых над конечными полями, оказываются весьма неточными и были улучшены многими авторами, в том числе Lachaud–Martin–Deschamps и, в самое последнее время, Ballet–Rolland–Tutdere, а также Aubry–Haloui–Lachaud. Кроме того, Цфасманом и Влэдучем были получены асимптотические формулы, дающие ответ на вопрос о росте числа классов, когда род $g \rightarrow \infty$.

Совместно с P. Lebacqze были получены нижние оценки на число классов, дающие в пределе формулу Цфасмана–Влэдуча и улучшающие во всех, кроме очень небольшого числа случаев, все известные ранее нижние границы на число точек на якобианах. В частности, эти границы оказываются очень хорошими, если род кривой не слишком мал. Более точно, получающийся результат таков:

Теорема 1. *Для всякой гладкой проективной кривой X/\mathbb{F}_q рода g и для всякого натурального N имеется оценка на число классов $h_X = |\text{Jac}_X(\mathbb{F}_q)|$:*

$$h_X \geq q^g \exp \left(\sum_{f=1}^N \frac{1}{f q^f} |X(\mathbb{F}_{q^f})| - \frac{2g}{(\sqrt{q}-1)(N+1)q^{\frac{N}{2}}} - \sum_{n=1}^N \frac{1+q^{-n}}{n} \right)$$

Подобный результат может иметь приложения к улучшению границ на плотности упаковок сфер, построенных с помощью функциональных полей (мультипликативные конструкции), а также имеет связь с теорией кодирования и криптографией.

Количество точек в семействах кривых над конечными полями

Важную информацию при исследовании асимптотических свойств многообразий над конечными полями дают примеры башен кривых. Одним самых интересных (и единственным асимптотически оптимальным) приме-

ром являются башни модулярных кривых над конечными полями. Описание башен модулярных кривых с помощью рекурсивных уравнений было дано N. Elkies'ом, в согласии с более ранними результатами A. Garcia и H. Stichtenoth о построении рекурсивных оптимальных башен над конечными полями.

Совместно с А. Зайцевым мы продолжили исследовать число точек на кривых над расширениями базового поля \mathbb{F}_q как функции от номера этажа в башне. Было изучено замыкание Галуа башни Гарсии–Штихтенота. Нами был доказан следующий результат:

Теорема 2. Пусть $\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{T}_n\}$ — замыкание Галуа башни Гарсии–Штихтенота над \mathbb{F}_{p^2} ($p > 2$). Тогда для всякого m найдется такое $N(m)$, что при $n \geq N(m)$

$$\tilde{T}_n(\mathbb{F}_{p^{2m}}) = p^{3n-4} - p^{3n-5} + p^{2n-5} + p^{2n-6}.$$

2 Опубликованные и поданные в печать работы

- A. Zykin, *Asymptotic properties of zeta functions over finite fields*, arXiv:1310.6107.

3 Участие в конференциях и школах

- Зимняя школа-конференция “Современные проблемы математики”, 01.2013, Екатеринбург.
Курс лекций: “Эллиптические кривые и криптография”.
- Конференция “Arithmetic days 2013”, St. Petersburg, May, 20 – 23
Talk: “Asymptotic properties of global fields and varieties over them”.

Организация конференций:

- Год арифметической геометрии в Лаборатории Poncelet (совместно с P. Lebacque, M. A. Цфасманом и M. Hindry). Организация визитов, курсов лекций, конференций.
- “Diophantine Geometry”, 05.2013, г. Москва (совместно с P. Lebacque, M. A. Цфасманом и M. Hindry).
- “Arithmetic days”, 05.2013, г. Москва (совместно с М. Бондарко, С. Востоковым, И. Жуковым, И. Фесенко).
- Летняя Школа “Алгебра и геометрия-3”, 07.2013, г. Ярославль (совместно с Ф. Богомоловым, М. Вербицким, А. С. Тихомировым и С. А. Тихомировым).
- “Global Fields 3”, 09.2013, г. Москва (совместно с P. Lebacque, M. A. Цфасманом и M. Hindry, A. Pirutka).

4 Работа в научных центрах и международных группах

- Научный визит в Institut de Mathématiques de Toulouse, 06.2013
Доклад: “On M -functions of modular forms”

5 Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

- Организация и доклады на семинаре “Арифметика, геометрия и теория кодирования” (совместный семинар лаборатории НМУ–Poncelet–ИППИ).
- Совместный курс НИУ ВШЭ и НМУ “Теория чисел” (2012–2013).
- Ведение семинара “Модулярные формы” (2012–2013, совместно с О. Шварцманом) для студентов НИУ ВШЭ.
- Лекции и семинары по дискретной математике (весна 2013), прием задач в НИУ ВШЭ.
- Руководство курсовыми работами студентов НИУ ВШЭ (8 человек в 2013 году), в том числе 3 дипломника-бакалавра.

6 Сравнение заявки с достигнутыми результатами

В заявке были сформулированы следующие основные задачи:

1. Асимптотическая теория в характеристике ноль: аналитические аспекты.
2. Приложения асимптотических результатов для изучения арифметических свойств многообразий над глобальными полями.
3. Асимптотические свойства дзета-функции Сельберга.
4. Распространение работ Ихары об M -функциях на случай L -функций модулярных форм.
5. Асимптотические свойства семейств полей, приходящих из модулярных форм.

Наиболее значительные результаты были достигнуты в направлении тем 2 и 4.

Совместно с А. Зайцевым удалось получить явные формулы для числа \mathbb{F}_{q^m} -точек для небольших m в зависимости от номера этажа для башен Гарсии–Штихтенота и Ван дер Геера–Ван дер Влюгта, а также формулы для числа точек в замыкании Галуа башни Гарсии–Штихтенота для всех m

и достаточно большого номера этажа башни. Совместно с Р. Лебаскье были получены явные оценки на количество \mathbb{F}_q -рациональных точек на якобианах кривых, в асимптотике дающие предельную формулу Цфасмана–Влэдуца. Кроме того, в дипломной работе студента Д. Кубрака, был доказан аналог теоремы Брауэра–Зигеля для алгебраических торов над функциональными полями.

Совместно с Р. Лебаскье, работы Ихары об M -функциях были распространены на случай модулярных форм. Это было сделано в двух ситуациях: когда фиксированная модулярная форма подкручивается на меняющийся характер и существенно более сложный случай усреднения по множеству примитивных форм, требующий для рассмотрения привлечения новых идей.

В направлении проблемы 1 было начато построение асимптотической теории семейств L -функций в характеристике ноль по аналогии со случаем L -функций над конечными полями. Были рассмотрены примеры семейств L -функций растущей степени, естественно возникающие в теории чисел: тензорные степени и симметрические степени L -функций, ассоциированных с модулярными формами.

К сожалению, не хватило времени для серьезной работы над частями 3 и 5 проекта. Мы надеемся приступить к работе над этими темами в ближайшее время.