

Нулевые множества пространств Бергмана и пространств со смешанной нормой

Известные классы Харди H^p функций f , аналитических в единичном круге \mathbb{D} , определяются условием ограниченности p -средних Рисса $\mathfrak{M}_p(f; r)$, $0 < r < 1$. Классы Бергмана A^p определяются аналогичным условием, в котором роль p -средних $\mathfrak{M}_p(f; r)$ по линейной мере играют p -средние по плоской мере.

Весьма важной для теории того или иного класса аналитических функций является возможность параметрического представления этого класса. Она существенным образом связана с задачей описания последовательностей нулей $z_k \in \mathbb{D}$ (нулевых множеств) функций данного класса. Описание нулевых множеств классов H^p дается условием Бляшке $\sum(1 - |z_k|) < \infty$. При переходе к классам Бергмана A^p и их обобщениям – классам Бергмана A_α^p со степенным весом t^α ($\alpha > -1$) – задача полного описания нулевых множеств становится весьма сложной (и до сих пор нерешённой). Установлено (М.М.Джрбашян, 1948г.), что подобное описание не может быть дано в терминах лишь модулей нулей и должно учитывать аргументы нулей. Но и распределение модулей нулей не имеет ещё полного обозримого описания. Например, не получил окончательного решения вопрос о необходимых условиях Г.Шапиро и А.Шилдса (1962г.) и А.М.Седлецкого (1987г.) на считающие функции нулей $n(r; f)$ функций $f \in A_\alpha^p$, аналогичный вопрос об условиях Ч.Горовица (1974г.) на произведения $|z_1| \dots |z_n|$ модулей нулей, вопрос о различии A_α^p -нулевых множеств.

В работах автора [1] и [2] найдены неулучшаемые необходимые условия на считающие функции нулей $n(r; f)$ и произведения $|z_1| \dots |z_n|$ модулей нулей функций из A_α^p и из более общих классов со смешанной нормой $A_{q,\alpha}^p$, $0 < q < \infty$ ($A_\alpha^p = A_{q,\alpha}^p$). В [2] при определённых значениях параметров доказано несовпадение нулевых множеств классов $A_{\alpha_1}^{p_1}$ и $A_{\alpha_2}^{p_2}$ в проблемном случае $(\alpha_1 + 1)/p_1 = (\alpha_2 + 1)/p_2$, $p_1 \neq p_2$. Полностью этот случай рассмотрен в совместной работе [3]. Дальнейшая работа планируется в следующих направлениях.

1. Продолжить изучение A_α^p -нулевых множеств с позиций классов $A_{q,\alpha}^p$. Введение параметра q , корректирующего рост функций в круге \mathbb{D} , представляется и далее достаточно перспективным.

2. Получить неулучшаемые необходимые условия на нулевые множества классов Бергмана и классов со смешанной нормой с весами более общими, чем степенные; в частности, охватить случай сколь угодно медленного роста средних Рисса.

3. Рассмотреть вопрос о зависимости нулевых множеств классов $A_{q,\alpha}^p$ от параметра p . Имеющиеся результаты пока говорят в пользу версии об их независимости от p .

[1] А.А. Долгобородов, "О нулях функций из пространств Бергмана и некоторых близких к ним пространств", *Математические заметки*, **88:2**, 2010, 201–216.

[2] А.А. Долгобородов, "О теореме Ч.Горовица о нулях функций из пространств Бергмана", *Analysis Mathematica*, **36**, 2010, 251–273.

[3] А.А. Долгобородов, Е.А. Севастьянов, "Экстремальные свойства подпоследовательностей нулей аналитических функций из пространств со смешанной нормой", *Математический сборник*, **202:8**, 2011, 3–20.