Покрытия и дискретные трансверсали в выпуклой геометрии. Краткое изложение заявки.

Арсений Акопян

Планируется исследовать три класса задач выпуклой и дискретной геометрии, так или иначе связанных с дискретными трансверсалями.

Знаменитая теорема Хелли утверждает, что если семейство $\mathcal{F}$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$ обладает свойством, что любые $d+1$ множеств семейства имеют непустое пересечение, то все множества семейства имеют непустое пересечение. Она была доказана в 1913 году, с тех пор было найдено множество интересных обобщений и приложений этой теоремы. Данными вопросами занимались такие математики как Н. Каратеодори, Л. Ловас, Б. Грюнбаум, Н. Алон, Л. Данцер, Г. Калаи и многи другие. Особый интерес с точки зрения приложений представляют вопросы о нахождении оценок на мощность конечной точечной трансверсали множества $\mathcal{F}$ специального вида, например множества транслятов или гомотетов выпуклого тела или множество параллелепипедов с ребрами параллельными осям координат. Ряд новых оценок в задачах такого типа были получены автором в его кандидатской диссертации. Планируется продолжить работу в этом направлении.

Кроме конечных точечных трансверсалей интересно рассматривать плоские трансверсали семейства тел, то есть k-плоскости, пересекающие все семейства данного набора. Задачи такого типа интересны тем, что имеют приложения в комбинаторике (в задачах о хроматических числах графов специального вида) или функциональном анализе. Важным примером такой задачи является проблема Дэвенпорта о разрезании выпуклого тела и эквивалентная ей задача Банга о покрытии полосками: *пусть выпуклое тело B покрыто набором полосок (множествами вида $a \leqslant \lambda(x) \leqslant b$, где λ — линейная функция), верно ли, что сумма относительных ширин (то есть отношения ширины полоски к ширине тела B в том же направлении) полосок будет не меньше* 1. Для случая центрально-симметричных тел ответ положительный, это было доказана К. Боллом в 1991-ом году, однако для произвольных выпуклых тел задача остается открытой.

Владимир Кадец доказал, что для любого покрытия единичного шара в $\mathbb{R}^d$ выпуклыми телами сумма радиусов вписанных шаров в эти тела будет не меньше 1. В связи с этим возникает вопрос, который является более общим чем задача Банга: если выпуклое тело B покрыто набором выпуклых тел $\{C_i\}$, верно ли, что $\sum r_B(C_i) \geqslant 1$, где $r_B(C_i)$ — это максимальный коэфициент вписанного в C_i гомотета тела B.

Совместно с Р. Н. Карасевым автору удалось доказать эту теорему для случая произвольных разбиений (а не покрытий) выпуклых тел на плоскости, а также для некоторого достаточно широкого класса разбиений в пространствах больших размерностей. В частности, авторам удалось найти более простое решение «задачи Конвея о картошке» (упрощенный вариант проблемы Дэвенпорта), раннее доказанной А. Бездеком и К. Бездеком. Автор продолжает работать над обобщением теоремы Кадеца для произвольных выпуклых тел.

Другим классом задач, которым автор планирует заниматься, связан с исследованием дискретного варианта теоремы Неша–Кейпера. В кандидатской диссертации было доказано, что любое 1-липшицево отображение d-мерного полиэдра в пространство размерности не меньшей d может быть аппроксимировано PL-изометрией, то есть PL-отображением, которое сохраняет длины всех кривых. Это обобщает полученный ранее результат С. Крат, Д. Бураго и А. Петрунина, которые доказали двумерный случай этой теоремы. Для размерности 2 в 1995-ом году Ю. Бураго и В. Залгаллером была доказана похожая теорема, являющаяся более важной с точки зрения приложения в теории многогранников. Они показали, что если отображение еще и является гладким вложением (или погружением), то аппроксимирующую его PL-изометрию можно выбрать тоже вложением (или погружением). Автор планирует обобщить этот результат на случай многогранников больших размерностей.