Геометрия пространства полиномов с неопределенными коэффициентами

А. И. Эстеров

Объектом изучения являются общие линейные комбинации мономов из данного конечного набора, а также возможные вырождения таких линейных комбинаций. В рамках проекта планируетя работа над следующими вопросами.

1) Разрабока основ тропической теории мультиособенностей. Пространство систем алгебраических уравнений, все мономы которых содержатся в данном конечном наборе, может быть стратифицировано в соответствии с особенностями многообразия решений системы. Тропикализация страта наименьшей положительной коразмерности (называемого дискриминантом или результантом) изучается, начиная с 90х, многими авторами. Я планирую начать изучение стратов большей коразмерности и подготовить необходимые методы тропической теории пересечений. Первая цель – получить тропическую версию формулы двойных точек.

Предполагается использовать методы, разработанные с А. Г. Хованским для работы с многогранниками Ньютона в контексте теории исключения (arXiv:math/0611107). Для их применения подготовлен способ работы со смешанными расслоенными многогранниками (arXiv:0810.4996) и тропической теорией пересечения (arXiv:1012.5800) на уровне опорных функций многогранников. Эти методы уже применены к изучению многогранников Ньютона дискриминантов систем уравнений (arXiv:0810.4996).

2) Перенос известной теории с алгебраических уравнений на экспоненциальные суммы, которые можно рассматривать как "многочлены с нецелыми степенями мономов". Таким экспоненциальным суммам также сопоставляются многогранники Ньютона в $\mathbb{C}^n$, псевдообъемы которых отражают топологию экспоненциальных сумм. Типичная проблема – почти периодическая версия теоремы Кушниренко: правда ли, что средня эйлерова характеристика e_s множества нулей экспоненциальной суммы s равна объему многогранника Ньютона s? Так как известно, что усреднение e_s по всем s с данным многогранником Ньютона равно его объему, достаточно доказать независимость e_s от s. Этому должно помочь конструктивное доказательство существования средней эйлеровой характеристики и других топологических инвариантов для почти периодических множеств (Izv. Math., 73 (2009), 611—626).

3) Изучение геометри и топологии систем алгебраических уравнений (над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$), мономы которых содержатся в данном конечном множесте, а коэффициенты находятся в общем положении. Хотя эта область – классическая начиная с 70х, в ней осталось удивительно много открытых вопросов. Типичная задача – описать оператор монодромии (включая нильпотентную часть) общей системы уравнений с данными мономами. Неунипотентная часть уже описана совместно с К. Такеучи (arXiv:1009.0230).

4) Определение дискриминанта системы k уравнений от n неизвестных для любых k и n, интерполирующее известные определения Тессье, Гельфанда-Капранова-Зелевинского, Штурмфельса и других, и наследующее их замечательные свойства. Традиционное понимание дискриминанта как множества систем с особыми решениями дает объект с безнадежно сложным поведением, и идея состоит в том, чтобы найти способ учитывать в определении дискриминанта особенности решений на бесконечности (arXiv:0810.4996). Частичные результаты уже получены.

За время работы над проектом я надеюсь получить результаты по пункту (1), по одному из пунктов (2) и (3) и завершить работу над пунктом (4).

Тексты работ доступны на http://sites.google.com/site/esterov/.