

Изучение границ эффективной разрешимости экстремальных задач на графах в решетке наследственных классов графов

Малышев Дмитрий Сергеевич

На конкурс заявляется проект, тематика которого лежит на стыке теории графов и теории сложности вычислений. В заявке рассматриваются наследственные классы графов (замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин) и изучается граница эффективной разрешимости задач на графах в семействе классов графов указанного типа. Объектом исследований являются «критические» классы графов, т.е. наследственные классы, играющие особую роль при нахождении «линии раздела» между NP-полнотой и полиномиальной разрешимостью. Изучение данных границ предполагается вести, опираясь на понятия минимального сложного и граничного классов графов. Сложный для данной задачи класс — наследственный класс, для которого задача не разрешима за полиномиальное время, минимальность сложного класса понимается относительно отношения включения. Граничный класс для данной задачи — минимальный по включению класс графов, являющийся пределом убывающей последовательности сложных для этой задачи наследственных классов. Значение этого понятия состоит в том, что класс графов, определяемый конечным множеством запрещенных порожденных подграфов, является сложным для данной задачи тогда и только тогда, когда он включает какой-нибудь граничный класс. Таким образом, понятие граничного класса является полезным инструментом при решении задачи разграничения, а понятие минимального сложного класса имеет смысл элемента изучаемой границы.

К настоящему времени ни для одной задачи на графах не получено полного описания граничных классов. Вместе с тем, в 2009 г. заявителем было показано, что данная цель для некоторых задач на графах является труднодостижимой ввиду сложности строения совокупности граничных классов. Именно, для каждой из задач о k -раскраске (вершинного и реберного вариантов) при $k = 3$ было найдено континуальное множество граничных классов графов. До этого результата среди классов графов, являющихся граничными хотя бы для одной задачи на графах, имелось всего 3 класса (ни один из них не был граничным для упомянутых задач). В рамках проекта предполагается детально изучить структуру граничных классов для задач о k -раскраске при $k > 3$ и соответствующих «предельных» задач — задач о хроматическом числе и индексе.

Понятие минимального сложного класса было введено в 2009 г. заявителем. В его работе был выявлен тип задач на графах, для каждой из которых минимальных сложных классов не существует. Там же были рассмотрены задачи о списковом ранжировании (это обобщения классических задач о списковой раскраске) и для них найдены минимальные сложные классы. В последующих работах автора изучались минимальные сложные классы для данных задач, определяемые небольшим количеством запрещенных порожденных подграфов. Именно, были полностью описаны минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании, определяемые не более чем тремя запрещенными порожденными подграфами. Однако, между реберным и вершинным вариантами имеется принципиальное различие, т.к. для последнего, несмотря на многочисленные усилия, не удается найти даже первый «последовательный минимум». Предполагается в рамках проекта выявление таких классов.