

Линейные дифференциальные уравнения, изомонодромные деформации и их применение

И.В. Вьюгин

Исследование посвящено аналитической теории дифференциальных уравнений и, в первую очередь, теории линейных дифференциальных уравнений и ее приложениям. Центральными вопросами этой теории являются обратные задачи, задачи, в которых требуется построить систему линейных дифференциальных уравнений, решения которой имеют нужные свойства, задаваемые обычно данными монодромии или обобщенными данными монодромии (в случае систем с иррегулярными особыми точками). После того, как А.А. Болибрухом в 1989 году был построен первый контрпример к проблеме Римана–Гильберта (обратной задачи для фуксовых систем), открылся целый ряд вопросов, связанных с условиями положительной разрешимости этой проблемы, а также с ее обобщениями. Например, им же было доказано, что любое неприводимое представление может быть реализовано монодромией фуксовой системы, не имеющей дополнительных особых точек. Кроме того для решения этих задач был разработан аппарат (см. работы Н. Röhrli, А.А. Болибрух, Н. Esnault и др.), были привлечены голоморфные расслоения со связностью и связанные с этим понятия. Это дало возможность достичь хороших результатов в исследовании необходимых и достаточных условий положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта.

Исследование в основном посвящено решению задач из близких областей, с использованием разработанных методов. Планируется, и частично это уже автором сделано, применить техники расслоений со связностями и изомонодромных слияний фуксовых особенностей к исследованию локального, в окрестности неподвижной особой точки, вида решений известных нелинейных уравнений (уравнений Шлезингера, Пенлеве III, V, VI, систем Гарнье) и описать связи между локальными ростками решений в особых точках. Кроме этого, планируется продолжить исследование обобщений проблемы Римана–Гильберта и некоторых вопросов дифференциальной теории Галуа, например, обобщить результат Ю.С. Ильяшенко и А.Г. Хованского, дающий критерий разрешимости в обобщенных квадратурах фуксовой системы с малыми коэффициентами, на случай иррегулярных систем с малыми коэффициентами. Планируется изучить некоторые вопросы из теории разностных уравнений, восходящей к Дж. Биркгофу. Например, планируется доказать, что решения достаточно широкого класса разностных уравнений в непрерывном пределе дают решения предельной системы дифференциальных уравнений, имеющие аналогичную асимптотику на бесконечности.

Кроме этого, автору совместно с И.Д. Шкредовым удалось обобщить результат С.В. Конягина и Д.Р. Хиф-Брауна, дающий оценку мощности пересечения мультипликативной подгруппы поля \mathbb{Z}_p с ее аддитивным сдвигом, на случай пересечения нескольких сдвигов. При доказательстве этого результата использовались элементы теории линейных дифференциальных уравнений. Планирую продолжить заниматься этой темой, улучшить полученную оценку. Это улучшение должно повлечь интересные следствия.