

Тензорные разложения и их свойства

Краткое содержание заявки
Оселедец Иван Валерьевич

Под «тензорами» подразумеваются всего лишь многомерные массивы (таблицы). Требуется построить малопараметрические представления для тензоров, обосновать их свойства (устойчивость, существование) и получить вычислительные алгоритмы для работы с тензорами в таких представлениях. Среди известных представлений для многомерных массивов — так называемое каноническое разложение и разложение Таккера. Они обладают рядом недостатков, в частности построение канонического разложения является NP-сложной задачей и само разложение может быть неустойчивым. «Золотым стандартом» в двумерном случае является сингулярное разложение матриц. Вопрос состоит в том, как обобщить сингулярное разложение на многомерный случай, и как работать с массивами в таком представлении.

В качестве основного представления планируется использовать ТТ (Tensor Train)-разложение, которое свободно от экспоненциальной зависимости по числу координатных осей, но при этом является устойчивым. Многие свойства ТТ-разложения «аналогичны» свойствам сингулярного разложения, что позволяет считать его «правильным» обобщением сингулярного разложения на многомерный случай.

Алгоритмы для работы с такими представлениями (например, методы решения линейных систем, задач на собственные значения) практически неразвиты, и существуют только предварительные численные результаты. Полностью отсутствуют теория сходимости таких алгоритмов. Поэтому важной задачей проекта является изучение свойств сходимости алгоритмов работы с представлением многомерных массивов, а также построение новых тензорных разложений.

Кроме алгоритмов построения разложения необходимо получить классы тензоров, которые допускают представления с небольшими ТТ-рангами. Имеющиеся теоретические результаты явно неполны: в данном случае теория существенно отстает от вычислительного эксперимента.

Подводя итоги, новые тензорные разложения позволят с математической точки зрения как изучить известные эффективные алгоритмы из различных областей науки, так и создать новые, что позволит глубже понять свойства представлений многомерных массивов и функций многих переменных.