

Асимптотический анализ возмущённых эллиптических краевых задач

Борисов Денис Иванович

Конкурс фонда "Династия" для молодых математиков

Программа 2, подпрограмма 2.2, отчет за 2013 г.

1 Основные полученные результаты

В 2013 г. я занимался исследованиями в разных направлениях. Первое из них – изучение задач в неограниченных областях с возмущениями из граничной теории усреднения и доказательство для них результатов о равномерной резольвентной сходимости. Рассматривалась задача об эллиптическом операторе в бесконечной полосе с мелкой и частой перфорацией вдоль заданной кривой. Перфорация предполагается непериодической, на границе выставляется одно из классических краевых условий. Основным результатом здесь – доказательство равномерной резольвентной сходимости возмущённого оператора к усреднённому и доказательство оценок скорости сходимости. При этом были рассмотрены различные случаи, соответствующие различным распределениям отверстий (то есть, различным соотношениям между размером отверстий и расстояниями между ними) и различным способам задания краевых условий на границах отверстий. В периодическом случае, когда спектр возмущённого оператора имеет зонную структуру, для нижних зонных функций были выписаны двучленные асимптотики. Результаты этой работы были оформлены в виде статьи D. Borisov, G. Cardone, T. Durante, "Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve", которая затем была направлена в печать. В настоящее время было принято о переработке статьи с учётом полученных замечаний.

Переработка была сделана в еще одной близкой задаче, в которой возмущением являлась не перфорация, а быстро осциллирующая граница. По сравнению с первоначальной версией статьи удалось улучшить оценки скорости сходимости и в ряде случаев даже доказать, что эти оценки неулучшаемы. Эти результаты были опубликованы в статье [4].

Следующее направление – изучение \mathcal{PT} -симметричных моделей. Была рассмотрена задача о \mathcal{PT} -симметричном дифференциальном операторе второго порядка в тонком многомерном слое. Оператор задавался в достаточно общем виде, коэффициенты оператора – переменные. \mathcal{PT} -симметричность оператора обеспечивалась за счёт специальных краевых условий третьего типа. Само свойство \mathcal{PT} -симметричности состояло в коммутировании с парой операторов \mathcal{P} и \mathcal{T} , где первый оператор описывает симметричное отражение слоя в себя относительно его продольной гиперплоскости, а второй оператор – обычное комплексное сопряжение. Подобного рода свойства является подходящей заменой свойства самосопряжённости оператора и в последнее время подобные операторы активно изучаются.

Основным результатом здесь – определение вида эффективного оператора, доказательство равномерной резольвентной сходимости возмущённого оператора к эффективному, нахождение полных асимптотических разложений изолированных собственных значений возмущённого оператора, сходящихся к изолированному собственному значению эффективного оператора. Для возмущённых собственных значений было показано, что они вещественные – один из наиболее ценных результатов в теории \mathcal{PT} -симметричных операторов. Кроме того, при получении асимптотических разложений была предложена достаточно изящная схема их обоснования. Необходимость в такой схеме возникла в связи с несамосопряжённостью возмущённого оператора и невозможностью пользоваться обычной схемой обоснования, основанной на самосопряжённости оператора.

В рамках российского-французского проекта, поддержанного РФФИ и CNRS, совместно с Константином Пакрашкиным (Франция, Орсе, Университет Париж-Юг) начато исследование двумерных периодических операторов с целью выделения примеров, когда зонные функции имеют конические точки. Подобного рода примеры, как сейчас известно, возникают в шестиугольных решетках и имеют отношение к моделированию графенов. Нашей целью является получение похожих эффектов для прямоугольных решёток. Определённые

результаты в этом направлении уже получены. Исходная постановка была сведена к обратной спектральной задаче определённого типа, который, как оказалось, ранее никем не рассматривался. В настоящее время усилия направлены на решение этой обратной спектральной задачи.

Совместно с немецкими коллегами (Ivan Veselić, Martin Tautenhahn, Технический университет г. Кемниц) ведутся исследования в области случайных гамильтонианов. В настоящее время работа идет над двумя проектами. В первом из них исследуется вопрос о сдвиге нижнего края спектра заданного оператора при добавлении к нему малого случайного возмущения. Удалось разобраться в общей схеме решения задачи, в настоящее время идёт доработка на уровне деталей. Второй проект посвящён изучению распределения собственных функций в пространстве для заданного эллиптического оператора. Решение этой задачи позволит применить её результаты для описания поведения спектра ряда случайных гамильтонианов. Работа над этим проектом ведётся в настоящее время. Общая схема решения задачи имеется, идёт доработка деталей.

Совместно с португальским коллегой (Pedro Freitas, Университет г. Лиссабона) исследована задача о первом собственном значении оператора Лапласа-Бельтрами на поверхности вращения, из которого вырезано большое либо малое отверстие. Получены различные оценки на это собственное значения, а также описано его асимптотическое поведения. На данный момент задача полностью решена, идёт оформление статьи.

2 Список публикаций

Опубликованные:

1. D.I. Borisov, K.V. Pankrashkin. Quantum waveguides with small periodic perturbations: gaps and edges of Brillouin zones // Journal of Physics A: Mathematics and General. 2013. V. 46. No. 23. id 235203 (18 pp)
2. D. Borisov, I. Veselic'. Low lying eigenvalues of randomly curved quantum waveguides // Journal of Functional Analysis. 2013. V. 265. No. 11. P. 2877-2909.
3. D. Borisov, P. Exner, A. Golovina. Tunneling resonances in systems without a classical trapping // Journal of Mathematical Physics. 2013. V. 54. No. 1. id 012102 (19 pp).
4. D. Borisov, G. Cardone, L. Faella, C. Perugia. Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary // Journal of Differential Equations. 2013. V. 255. No. 12. P. 4378-4402.
5. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone. Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics // Zeitschrift fuer Angewante Mathematik und Physik. 2013. V. 64. No. 3. P. 439-472
6. Д.И. Борисов, К.В. Панкрашкин. Открытие лакун и расщепление краев зон для волноводов, соединенных периодической системой малых окон // Математические заметки. 2013. Т. 93, № 5. С. 665-683.
7. Д.И. Борисов, К.В. Панкрашкин. Об экстремумах зонных функций в периодических волноводах // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47, № 3. С. 87-90.
8. D. Borisov, P. Freitas. On the spectrum of deformations of compact double-sided flat hypersurfaces // Analysis and Partial Differential Equations. 2013. V. 6. No. 5. P. 1051-1088.
9. D. Borisov, P. Freitas. Asymptotics for the expected lifetime of Brownian motion on thin domains in \mathbb{R}^n // Journal of Theoretical Probability. 2013. V. 26. No. 1. P. 284-309.

Принятые к печати:

1. Д. Борисов. Дискретный спектр тонкого РТ-симметричного волновода // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, №1, принято к печати.

3 Конференции

1. Международная конференция “Нелинейный анализ и спектральные задачи”, Уфа, 18-22 июня, 2013.
2. 5-ая Санкт-Петербургская конференция по спектральной теории, посвящённая памяти М.Ш. Бирмана, Санкт-Петербург, 2-6 июля 2013 г.

4 Педагогическая деятельность

Работаю профессором кафедры математики и статистики Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы и профессором кафедры специальных глав математики Уфимского государственного авиационного технического университета. В БГПУ им. М. Акмуллы в 2012/2013 учебном году читал лекции и вёл практические занятия по курсам “Математический анализ”, “Теория функций действительного переменного”. В 2013/2014 читаю лекции и веду практические занятия по курсам “Уравнения математической физики”, “Теория функций действительного переменного”, “Дополнительные главы уравнений математической физики”. В УГАТУ начал работать с осени 2013 г., здесь веду практические занятия по курсам “Математика” и “Математический анализ”.

20 сентября 2013 г. под моим руководством была успешно защищена кандидатская диссертация моей аспиранткой Головиной Анастасией Михайловной на тему “Резольвенты и спектры периодических операторов с разбегающимися возмущениями” по специальности 01.01.02.

Руководжу одним аспирантом 2-го года обучения (Шарапов Тимур Фархатович) и студентом 4-го курса (Каримов Рамис Хамитович).