Александр Долгобородов: отчет за 2013 год

1 Результаты, полученные в этом году

Основной результат, полученный в этом году, входит во вторую часть моей диссертации "Распределение нулей аналитических функций из пространств Бергмана и пространств со смешанной нормой" и завершает подготовку диссертации к защите.

Обозначим через $\Phi_{q,\gamma}$ множество неотрицательных убывающих на $(0,1)$ функций $\varphi(t)$, для которых

$$\|\varphi\|_{q,\gamma} := \left(\int_0^1 (\varphi(t)t^{\gamma})^q \, \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty,$$

$0 < \gamma < \infty$, $0 < q \le \infty$, при $q = \infty$ полагая

$$\|\varphi\|_{\infty,\gamma} := \sup_{0<t<1} \{\varphi(t)t^{\gamma}\}.$$

Пусть $A(\mathbb{D})$ – пространство аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, $z = re^{i\theta}$, $f \in A(\mathbb{D})$, $p \in (0, +\infty)$,

$$M_p(f;r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p},$$

$$M_{\infty}(f;r) = \max_{0 \le \theta \le 2\pi} |f(re^{i\theta})|,$$

$$M_0(f;r) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta \right\}, \ 0 < r < 1 \, .$$

Через $H^p_{q,\gamma}$ $(0 \le p \le \infty,\ 0 < q \le \infty,\ 0 < \gamma < \infty)$ обозначим множество функций $f \in A(\mathbb{D})$ таких, что $M_p(f; 1-t) \in \Phi_{q,\gamma}$.

Пусть $\varepsilon(t) \in E$, то есть $\varepsilon(t)$ непрерывная неубывающая на $(0,1]$ функция, $\varepsilon(+0) = 0$,

$$\frac{\varepsilon(t)}{t} \uparrow \infty, \ t \to +0.$$

Обозначим через $H^p_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$ $(0 \le p \le \infty, q > 0, \gamma > 0)$ множество функций $f \in H^p_{q,\gamma}$ таких, что

$$1 - |z_n(f)| \le \frac{\gamma}{n} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) n \right)$$

для достаточно больших n, $n > n(f)$.

Определим также семейство T положительных непрерывных возрастающих на $(0,1]$ функций η, $\eta(+0)=0$, таких, что

а) $\eta(t)/t^{\lambda}\uparrow+\infty$, $t\to+0$, $\forall\lambda>0$;

б) при достаточно малых t из равенства $\eta(t)=c\eta(\tau)\,(c=\mathrm{const}>1)$ следует неравенство $\tau\le t^{\beta}$ при некотором $\beta>1$ (зависящем от η и c).

Пусть, наконец,

$$\eta(t)\in T,\ f(z)\in H^{p}_{q,\gamma},\ f(z)=z^{l}g(z),\ g(0)\ne 0,\ l\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Обозначим через $H^{p,\eta(t)}_{q,\gamma}$ множество функций f, для которых выполняется неравенство

$$\pi_n(g)\le c(f)\eta\left(\frac{1}{n}\right)n^{\gamma},\ n\in\mathbb{N},$$

где $c(f)$ не зависит от n.

Последовательность номеров $\{n_k\}$, $n_1<n_2<\ldots$, назовем *экстремальной для подпространства* $H^{p}_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$, если существует функция $f\in H^{p}_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$, для которой при всех достаточно больших k

$$1-|z_{n_k}(f)|=\frac{\gamma}{n_k}\log\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n_k}\right)n_k\right). \tag{1}$$

Тогда справедливо

Утверждение 1. *Пусть* $\varepsilon(t)\in E$; $\gamma>0$;

$$\frac{\varepsilon(t)}{t}\ge\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\lambda},\ \lambda>\max\{1,1/\gamma\}, \tag{2}$$

при достаточно малых $t\in(0,1]$; *пусть также* $n_k\in\mathbb{N}$, $n_k\uparrow\infty$, $\varepsilon(1/n_k)=O(1/n_{k-1})$ *при* $k\to\infty$.

При любом $p\in[0,\infty]$ *последовательность* $\{n_k\}$ *является экстремальной для подпространства* $H^{p}_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n_k}\right)\prod_{j=1}^{k-1}\varepsilon\left(\frac{1}{n_j}\right)n_j\right)^{\gamma q}<\infty. \tag{3}$$

Последовательность номеров $\{n_k\}$, $n_1<n_2<\ldots$, назовем *экстремальной для подпространства* $H^{p,\eta(t)}_{q,\gamma}$, если существует функция $f\in H^{p,\eta(t)}_{q,\gamma}$, для которой при всех достаточно больших k

$$\pi_{n_k}(f)\ge c(f)\eta\left(\frac{1}{n_k}\right)n_k^{\gamma}\quad(c(f)>0). \tag{4}$$

Тогда выполняется

Утверждение 2. *Пусть $q > 0$, $\eta(t) \in T$, $\gamma > 0$ и $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность номеров такая, что*

$$\frac{n_k}{n_{k+1}} \downarrow 0, \ \ \sum \frac{n_k}{n_{k+1}} \log \frac{n_{k+1}}{n_k} < \infty \text{ при } \gamma \geq 1, \tag{5}$$

$$\sum \left(\frac{n_k}{n_{k+1}} \right)^\gamma < \infty \text{ при } 0 < \gamma < 1. \tag{6}$$

При любом $p \in [0, \infty]$ последовательность $\{n_k\}$ является экстремальной для подпространства $H_{q,\gamma}^{p,\eta(t)}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum \eta \left(\frac{1}{n_k} \right)^q < \infty. \tag{7}$$

При этом, понятие экстремальной последовательности для подпространства $H_{q,\gamma}^{p,\eta(t)}$ содержательно только при мажорантах $\eta(t)$, достаточно медленно стремящихся к нулю при $t \to 0$. Аналогичное замечание можно сделать и в отношении мажорант $\varepsilon(t)$, определяющих подпространства $H^p_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$. В утверждениях 1 и 2 отражены свойства нулевых множеств тех функций из $H^p_{q,\gamma}$, у которых характеристики $1-|z_n(f)|$ и $\pi_n(f)$ не имеют регулярных мажорант, достижимых при всех достаточно больших n.

Сравнивая условия (3) и (7) при $\varepsilon(t) = \eta(t)^{1/\gamma}$, заключаем, что если последовательность $\{n_k\}$ является экстремальной для $H^p_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$, причем, последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяют условиям (5) и (6) утверждения 2, то $\{n_k\}$ является экстремальной последовательностью для $H_{q,\gamma}^{p,\eta(t)}$. Таким образом, если $\nu(t) = \varepsilon(t)^\gamma$, то множество экстремальных последовательностей для $H_{q,\gamma}^{p,\nu(t)}$ шире множества экстремальных последовательностей для $H^p_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$, при том, что

$$H_{q,\gamma}^{p,\eta(t)} \subset H^p_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$$

(при сохранении условия $\eta(t) = \varepsilon(t)^\gamma$).

Это можно интерпретировать как проявление меньшей иррегулярности характеристики $\pi_n(f)$ как функции номера n по отношению к характеристике $1-|z_n(f)|$: мажоранта для $\pi_n(f)$ достигается чаще, чем мажоранта для $1-|z_n(f)|$.

Заметим еще, что диапазон изменения мажоранты $\varepsilon(t)$ в утверждении 1 (см. (2)) существенно шире того, что мы имеем при условии $\varepsilon(t) = \eta(t)^{1/\gamma}$, где $\eta(t)$ удовлетворяет условию утверждения 2.

Это также можно интерпретировать как относительно бóльшую по сравнению с $\pi_n(f)$ иррегулярность поведения уклонений $1-|z_n(f)|$. При условии (2) мажоранта $t \log \frac{\varepsilon(t)}{t}$ в неравенстве

$$1 - |z_n(f)| \leq \frac{1}{n} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) n \right)$$

не достигается на всех достаточно больших n (какой бы ни была функция $f \in \in H^p_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$). Максимальная частота экстремальной последовательности номеров в пространстве $H^p_{q,\gamma,\varepsilon(t)}$ является характеристикой регулярности уклонений $1 - |z_n(f)|$ в этом пространстве.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

1. Е.А.Севастьянов, А.А.Долгобородов, Нули функций в весовых пространствах со смешанной нормой, *Математические заметки*, 2013, 94(2), стр. 279–294.

2. А.А.Долгобородов, Об оценках произведений модулей нулей функций из пространств Бергмана и более общих пространств, *Analysis Mathematica*, 2013, 39(2), стр. 123–134.

3 Участие в конференциях и школах

В этом году в конференциях и школах участия не принимал.

4 Педагогическая деятельность

Весь год я преподавал математический анализ, функциональные ряды, линейную алгебру и аналитическую геометрию на кафедре №30 Высшей математики НИЯУ МИФИ.