КОМБИНАТОРИКА ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ. ОТЧЁТ ЗА 2013 ГОД.

Н. Ю. ЕРОХОВЕЦ.

1. Результаты, полученные в этом году

В центре внимания торической топологии лежит сопоставление каждому простому выпуклому n-мерному многограннику P с m гипергранями $(m+n)$-мерного *момент-угол многообразия* $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием n-мерного компактного тора $T^m=(S^1)^m$, таким что $\mathcal{Z}_P/T^m=P$. Эквивариантный топологический тип этого многообразия зависит только от комбинаторного типа многогранника, что позволяет изучать комбинаторику многогранника при помощи топологии момент-угол многообразия и наоборот. Например, числа Бетти $\beta^i(\mathcal{Z}_P)$ являются комбинаторными инвариантами многогранника P. На этом пути возникает *инвариант Бухштабера* $s(P)$, равный максимальной размерности торических подгрупп $H\subset T^m$, $H\simeq T^r$, действующих свободно на $\mathcal{Z}_P$. Для этого числа верны оценки $1\leqslant s(P)\leqslant m-n$, причём в случае $s(P)=1$ многогранник P является симплексом (то есть $m-n=1$), а в случае $s(P)=m-n$ фактор-пространство $\mathcal{Z}\ /T^{m-n}$ является $(2n)$-мерным многообразием со стандартным действием n-мерного тора T^n, таким что $M^{2n}/T^n=P$. Многообразия M^{2n} называются *квазиторическими.* Их конструкция была впервые предложена М. Дэвисом и Т. Янушкевичем в качестве топологических аналогов алгебраических торических многообразий. Однако, не для всех многогранников существует хотя бы одно квазиторическое многообразие. В связи с этим в 2002 году В. М. Бухштабером была поставлена проблема получить эффективное описание числа $s(P)$ в терминах комбинаторики многогранника P. Случай $s(P)=2$ является первым нетривиальным. Как было показано автором, для любого k существует многогранник P с $m-n=k$, у которого $s(P)=2$.

Для произвольного *абстрактного симплициального комплекса* K на m вершинах (т.е. системы подмножеств $K=\{\sigma\subset[m]=\{1,2,\dots,m\}\}$, такой что $\varnothing\in K$ и если $\sigma_1\subset\sigma_2$ и $\sigma_2\in K$, то $\sigma_1\in K$) определён момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ с каноническим действием тора T^m, причём для граничного комплекса $K_P=\partial P^*$ симплициального многогранника P^*, полярного к простому многограннику P, имеется эквивариантный гомеоморфизм $\mathcal{Z}_K\simeq\mathcal{Z}_P$. Таким образом, число Бухштабера определено для любого симплициального комплекса K, причём $s(P)=s(K_P)$. Определены вещественный аналог $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ момент-угол комплекса с действием $\mathbb{Z}_2^m$ и вещественный аналог $\mathrm{s}_{\mathbb{R}}(K)$ числа Бухштабера, причём $s(K)\leqslant \mathrm{s}_{\mathbb{R}}(K)$ и для $r=1,2,3$ имеем: $s(K)\geqslant r$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{s}_{\mathbb{R}}(K)\geqslant r$.

В 2013 году в обзоре [E13] были систематизированы старые и получены новые результаты о числе Буштабера. Среди новых результатов выделим следующие:

I. В 2009 году А.А. Айзенберогом была получена формула $s(K)=m-\lceil\log_2(\gamma(K)+1)\rceil$, если $\dim K=1$ (т.е. K – простой граф), где $\gamma(K)$ – хроматическое число графа. Для общего случая симплициальных комплексов им была доказана оценка $s(K)\leqslant m-\lceil\log_2(\gamma(K)+1)\rceil$, где $\gamma(K)$ – хроматическое число 1-остова.

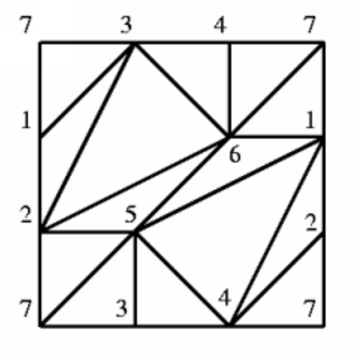
Получено обобщение результата А.А. Азенберга на случай $\dim(K) = 2$.

Утверждение 1. *Пусть* $\dim(K) = 2$. *Тогда*

$$m - 1 - \lceil \log_2 \gamma(K) \rceil \leqslant s(K) \leqslant m - \lceil \log_2(\gamma(K) + 1) \rceil.$$

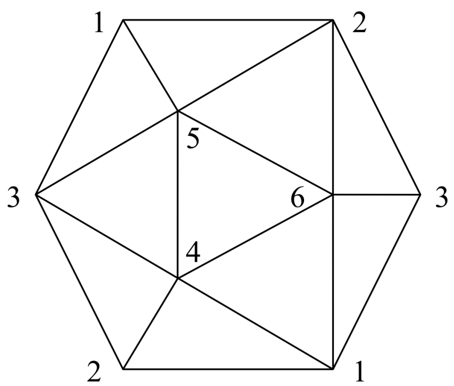
Здесь верхняя и нижняя оценки – целые числа, разность которых не превосходит единицы. Более того, они совпадают тогда и только тогда, когда $\gamma(K) = 2^l$, *и в этом случае* $s(K) = m - l - 1$.

Для единственной минимальной триангуляции тора с $m = 7$ вершинами



получаем: $\gamma(K) = 7$, $7 - 1 - \lceil \log_2 7 \rceil = 3 = s(K)$, то есть достигается нижняя оценка.

Для единственной минимальной триангуляции проективной плоскости с $m = 6$ вершинами



получаем: $\gamma(K) = 6$, $6 - 1 - \lceil \log_2 6 \rceil = 2$, но $s(K) = 3 = 6 - \lceil \log_2(6+1) \rceil$, то есть достигается верхняя оценка.

Положим $\mathcal{H}(M) = \frac{7+\sqrt{49-24\chi(M)}}{2}$. Известно, что для любой триангуляции K замкнутой компактной двумерной поверхности M число вершин $m \geqslant \lceil \mathcal{H}(M) \rceil$, а хроматическое число $\gamma(K) \leqslant [\mathcal{H}(M)]$.

Следствие 2. *Для любой триангуляции K двумерной замкнутой компактной поверхности M имеем*

$$s(K) \geqslant \lceil \mathcal{H}(K) \rceil - 1 - \lceil \log_2 [\mathcal{H}(K)] \rceil,$$

в частности для $\mathbb{R}P^2$ *и* T^2 *имеем* $s(K) \geqslant 3$, *в силу этой оценки и того, что для единственной триангуляции* $\mathbb{R}P^2$ *с* 6 *вершинами* $s(K) = 3$.

II. Описана связь вещественного числа Бухштабера с матроидами. Матроид – комбинаторный аналог набора векторов в векторном пространстве. Более точно *матроидом* на множестве $[m]$ называется абстрактный симплициальный комплекс M, такой что если $\sigma_1, \sigma_2 \in M$ и $|\sigma_1| < |\sigma_2|$, то найдётся $i \in \sigma_2 \setminus \sigma_1$, что $\sigma_1 \cup \{i\} \in M$. *Рангом* матроида называется число $\dim(M) + 1$.

Классическим примером матроида является система линейно независимых подмножеств набора m векторов в векторном пространстве над некоторым полем. Такие матроиды называются *реализуемыми.* Матроид, реализуемый конфигурацией векторов в $\mathbb{Z}_2^r$ называется *бинарным.*

Приведём два известных результата о бинарных матроидах.

Максимальные по включению симплексы называются *базами* матроида M.

Лемма. *Набор $\mathcal{B} = \{B_k \subset [m]\}$ подмножеств в $[m]$ является множеством баз некоторого матроида на $[m]$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} \neq \varnothing$ и для любых B_i и B_j в $\mathcal{B}$ и $x \in B_i \setminus B_j$ найдётся элемент $y \in B_j \setminus B_i$, такой что $(B_i \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$. Более того, матроид является бинарным тогда и только тогда, когда для любых двух баз B_i и B_j и любого элемента f из B_j число элементов e из B_i, таких что одновременно $(B_i \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ и $(B_j \setminus \{f\}) \cup \{e\}$ являются базами, нечётно.*

Недостающие симплексы (то есть минимальные по включению множества, не являющиеся симплексами) называются *циклами* матроида M.

Лемма. *Набор $\mathcal{C} = \{C_k \subset [m]\}$ подмножеств в $[m]$ является множеством циклов некоторого матроида на $[m]$ тогда и только тогда $\varnothing \notin \mathcal{C}$, $C_i \not\subset C_j$ при $i \neq j$, и для любых $C_i \neq C_j$ из $\mathcal{C}$ и $e \in C_i \cap C_j$ найдётся $C_k \in \mathcal{C}$, такое что $C_k \subset C_i \cup C_j \setminus \{e\}$. Более того, матроид является бинарным тогда и только тогда, когда для любых различных циклов C_i и C_j и элементов e и f из $C_i \cap C_j$, найдётся цикл $C_k \subset C_i \cup C_j \setminus \{e, f\}$.*

Утверждение 3. *Имеем $s_{\mathbb{R}}(K) \geqslant r$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

– Существует бинарный матроид M ранга r на множестве $[m]$, такой что
(SM) *для любого $\sigma \in K$ существует база B матроида M, такая что $B \subset [m] \setminus \sigma$.*

– Существует бинарный матроид M ранга $m - r$ на множестве $[m]$, такой что
(ΛM) *K является симплициальным подкомплексом в M.*

Пусть $m \geqslant n + 2$. *Двойственный (по Александеру) симплициальный комплекс* на множестве вершин $[m]$ определяется как

$$\widehat{K} = \{\sigma \subset [m] \colon [m] \setminus \sigma \notin K\}.$$

Симплициальных комплекс называется *k-смежностным*, если $\sigma \in K$ для всех σ с $|\sigma| \leqslant k$.

Теорема 4. *Пусть $m \geqslant n + 2$. Тогда $s_{\mathbb{R}}(K) \geqslant r$ тогда и только тогда, когда найдётся $(r-1)$-смежностных подкомплекс $\widehat{M} \subset \widehat{K}$ такой что $(\sigma_1 \cap \sigma_2) \cup \{i, j\} \in \widehat{M}$ для любых двух различных максимальных симплексов $\sigma_1, \sigma_2 \in \widehat{M}$ и возможно совпадающих вершин $i, j \notin \sigma_1 \cup \sigma_2$.*

Это даёт описание вещественного числа Бухштабера целиком в термина подкомплексов симплициального комплекса, что является продвижением в проблеме Бухштабера.

III. Получено описание числа Бухштабера в терминах рациональных точек многообразий Грассмана. Рассмотрим *многообразие Грассмана* $G_r(\mathbb{R}^m)$ всех r-мерных подпространств в $\mathbb{R}^m$. Известно вложение $G_r(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathbb{R}P^{\binom{m}{r}-1}$, которое задаётся набором *плюккеровых координат* $\{p_{i_1 \dots i_r} = \det S^{i_1 \dots i_r}\}$, определённых с точностью до общего множителя. Образ этого вложения описывается набором квадратичных уравнений:

$$\sum_{t=1}^{r+1}(-1)^t p_{i_1\dots i_{r-1}j_t}p_{j_1\dots\widehat{j_t}\dots j_{r+1}} = 0 \text{ для всех } \{i_1,\dots,i_{r-1}\} \text{ и } \{j_1,\dots,j_{r+1}\}.$$

Утверждение 5. *Имеем $s(K)\geqslant r$ тогда и только тогда, когда найдётся рациональная точка в $G_r(\mathbb{R}^m)$, такая что для целочисленных взаимно простых плюккеровых координат имеем: НОД$\{p_{i_1\dots i_r}\colon i_1,\dots,i_r\notin\sigma\}=1$ для любого максимального симплекса $\sigma\in K$.*

IV. Получен результат о многогранниках с числом Бухштабера равным двум.

Утверждение 6. *Если $s(P)=2$, то $2\leqslant m-n\leqslant 2+\left[\frac{n}{2}\right]$. При этом либо $P=I\times\Delta^n$, либо любые две гиперграни многогранника P пересекаются. Более того, любые $(m-n-2)$ гиперграней многогранника P пересекаются. Кроме того,*
- *если $m-n=2$, то $P=\Delta^i\times\Delta^j$;*
- *если $m-n=3$, то у P имеется не менее 9 недостающих граней;*
- *если $n=2$, то $P=I\times I$;*
- *если $n=3$, то $I\times\Delta^2$.*

V. Получена оценка числа Бухштабера через полные подкомплексы.

Утверждение 7. *Пусть $[m]=I_1\sqcup I_2\sqcup\dots\sqcup I_k$, $I_j\neq\varnothing$ для всех j. Тогда*

$$s(K|_{I_1})+\dots+s(K|_{I_k})\leqslant s(K)\leqslant\min_j\{s(K|_{I_j})+m-|I_j|\}.$$

2. Опубликованные и поданные в печать работы

[BEP13] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, Т. Е. Панов, *Алгебра и комбинаторика выпуклых многогранников*, приложение к переводу книги Günter M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Москва, МЦНМО, 2013-2014.

[E13] Н.Ю. Ероховец, *Теория инварианта Бухштабера симплициальных комплексов и выпуклых многогранников*, Труды ММО (принято к печати).

[E13t1] N. Erokhovets, *Characterization of simplicial complexes with Buchstaber number two*, Тезисы международной конференции «Алгебраическая топология и абелевы функции», посвящённой 70-летию чл.-корр. РАН В.М.Бухштабера, Москва, 2013, стр. 49-51.

[E13t2] N. Erokhovets, *Buchstaber invariant, 2-surfaces and matroids* в «Действия торов: топология, геометрия и теория чисел». Тезисы докладов Международной открытой российско-китайской конференции, Хабаровск, 2013, стр. 28-34.

[E13t3] N.Erokhovets, *Buchstaber invariant and matroids*, Тезисы международной конференции «Геометрия, топология и приложения», посвященной 70-летию профессора Н.П.Долбилина, Ярославль, 2013, стр. 43-46.

[E13tr] N.Yu. Erokhovets, *Triangulations of two-dimensional surfaces and chromatic numbers*, Материалы Летней школы Лаборатории дискретной и вычислительной геометрии имени Б.Н. Делоне.

3. Участие в конференциях и школах

(1) Рождественские математические встречи фонда Дмитрия Зимина «Династия», 8-11 января 2013, НМУ.
Доклад *Критерий того, что инвариант Бухштабера симплициального комплекса равен двум.*

(2) 5-ая конференция по дискретной геометрии и алгебраической комбинаторике, Браунсвиль, Техас, США, 17-20 апреля 2013.
Доклад *Problems and results of the Buchstaber invariant theory for simple polytopes and simplicial complexes.*

(3) Международная конференция «Ломоносовские чтения», Москва, апрель 2013.
Доклад *Критерий того, что число Бухштабера симплициального комплекса равно двум.*

(4) Международная конференция «Алгебраическая топологий и абелевы функции», посвящённая 70-летию член-корр. РАН В.М. Бухштабера, Москва, 18-22 июня 2013.
Доклад *Characterization os simplicial complexes with the Buchstaber number two.*

(5) Открытая Русско-Китайская конференция «Торические действия: топология, геометрия и теория чисел», Хабаровск, 02-07 сентября 2013.
Доклад *Buchstaber Invariant, 2-surfaces and matroids.*

(6) Международная конференция «Геометрия, топология и приложения», посвящённая 70-летию Н.П.Долбилина, Ярославль, ЯрГУ имени П.Г.Демидова, 23-27 сентября 2013.
Доклад *Buchstaber Invariant and Matroids.*

(7) Летняя школа Лаборатории дискретной и вычислительной геометрии имени Б.Н.Делоне (22 июля – 2 августа 2013)
Два научно-популярных доклада с общим названием *Triangulations of two-dimensional surfaces and chromatic numbers* на научном семинаре школы.

4. Работа в научных центрах и международных группах

(1) В 2013 году являлся сотрудником лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» имени Б. Н. Делоне (грант Правительства РФ 11.G34.31.0053).

(2) В рамках русско-японского гранта РФФИ 12-01-92104-ЯФ-а участвовал (с небольшим докладом *On the Buchstaber Invariant Theory*) в русско-японской встрече 24 июня 2013 года.

(3) В рамках русско-китайского гранта РФФИ 13-01-91151-ГФЕН-а выступил с докладом *Buchstaber invariant, 2-surfaces and matroids* на открытой Русско-Китайской конференции «Торические действия: топология, геометрия и теория чисел» (Хабаровск, 02-07 сентября 2013).

5. Педагогическая деятельность

I. На механико-математическом факультете МГУ:

(1) Весной 2013 года вёл учебный семинар по линейно алгебре у первого курса механиков.

(2) Осенью 2013 года вёл учебный семинар по аналитической геометрии у первого курса механиков.

(3) Весь год помогал Т. Е. Панову и А. В. Пенскому проводить учебно-научный семинар «Геометрия и топология» для студентов и аспирантов. Программа этого семинара во многом связана с задачами в рамках проекта.

II. В казахтанском филиале МГУ (Астана) провёл блок (2 недели) семинарских занятий по аналитической геометрии для первого курса.

III. Выступил с двумя научно-популярными докладами с общим названием *Triangulations of two-dimensional surfaces and chromatic numbers* на научном семинаре летней школы Лаборатории дискретной и вычислительной геометрии имени Б.Н. Делоне под руководством Герберта Эдельсбруннера (июль 2013)