Отчет А.Е. Миронова за 2013 год

1. Полученные результаты.

В случае гиперэллиптических спектральных кривых получены уравнения, эквивалентные уравнениям Кричевера-Новикова на дискретную динамику параметров Тюрина. Построены примеры коммутирующих разностных операторов ранга два, отвечающих гиперэллиптичесим спектральным кривым произвольного рода (совместно с Г. Маулешовой).

Введены дискретные модули Бейкера-Ахиезера на алгебраических многообразиях. Построены примеры свободных модулей. Построены примеры коммутативных колец разностных операторов от нескольких дискретных переменных (совместно с А.Накаяшики).

1.1 Коммутирующие разностные операторы.

И.М. Кричевером и С.П. Новиковым открыт замечательный класс точных решений солитонных уравнений – алгебро–геометрических решений ранга $l > 1$. Этот класс выделяется следующим условием. Совместные собственные функции вспомогательных линейных операторов, задающих спектральную кривую Γ, образуют векторное расслоение ранга l над Γ. Для двумеризованной цепочки Тоды

$$\partial^2_{\xi\eta}\varphi_n = e^{\varphi_n-\varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n+1}-\varphi_n} \qquad (1)$$

это означает следующее. Уравнение (1) допускает представление Лакса

$$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = 0,$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \partial_\xi - T - \varphi_{n\xi}, \quad \mathcal{L}_2 = \partial_\eta - e^{\varphi_n-\varphi_{n+1}}T^{-1},$$

T— оператор сдвига, $T\varphi_n = \varphi_{n+1}$. Решения ранга l выделяются дополнительными условиями

$$[\mathcal{L}_i, L_1] = [\mathcal{L}_i, L_2] = [L_1, L_2] = 0, \quad i = 1, 2,$$

где $L_1,\ L_2$–разностные операторы, определяющие спектральную кривую

$$L_1 = \sum_{k=N_-}^{N_+} u_k(n)T^k, \quad L_2 = \sum_{k=M_-}^{M_+} v_k(n)T^k,$$

коэффициенты $L_1,\ L_2$ также зависят от ξ, η. При этом предполагается, что размерность пространства совместных собственных функций

$$L_1\psi = z\psi, \quad L_2\psi = w\psi,$$

для общей точки $P = (z, w) \in \Gamma$ равна l. Спектральная кривая Γ задается уравнением $R(z, w) = 0$, где R– полином, с постоянными коэффициентами зануляющий $L_1, \quad L_2, \quad R(L_1, L_2) = 0$.

Максимальное коммутативное кольцо разностных операторов, содержащее L_1 и L_2, изоморфно кольцу мероморфных функций на алгебраической спектральной кривой Γ с полюсами в $q_1, \ldots, q_n$. Такие операторы называются n-точечными.

В случае $n = 2$ и $l = 1$ разностные коммутирующие операторы найдены И.М. Кричевером и Д. Мамфордом. Общая теория операторов ранга l развита К.М. Кричевером и С.П. Новиковым. В частности ими найдены операторы ранга два с эллиптической спектральной кривой.

Рассмотрим операторы, отвечающие гиперэллиптической спектральной кривой Γ рода g

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + c_{2g-1}z^{2g-1} + ... + c_0, \tag{2}$$

при этом

$$L_4 = \sum_{i=-2}^{2} u_i(n)T^i, \quad L_{4g+2} = \sum_{i=-(2g+1)}^{2g+1} v_i(n)T^i,$$

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi, \quad \psi = \psi(n, P), \quad P = (z, w) \in \Gamma.$$

Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \quad \sigma(z, w) = \sigma(z, -w).$$

Совместные собственные функции L_4 и L_{4g+2} удовлетворяют следующему уравнению

$$\psi(n+1, P) = \chi_1(n, P)\psi(n-1, P) + \chi_2(n, P)\psi(n, P). \tag{3}$$

Функции $\chi_1(n, P)$ и $\chi_2(n, P)$ рациональны на Γ и имеют $2g$ простых полюсов, зависящих от n. Функция $\chi_2(n, P)$ дополнительно имеет простой полюс в точке $q = \infty \in \Gamma$. Для того, чтобы найти операторы L_4 и L_{4g+2}, достаточно найти функции χ_1 и χ_2.

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 *Если*

$$\chi_1(n,P)=\chi_1(n,\sigma(P)),\quad \chi_2(n,P)=-\chi_2(n,\sigma(P)), \tag{4}$$

то оператор L_4 *имеет вид*

$$L_4=(T+V(n)T^{-1})^2+W(n), \tag{5}$$

при этом

$$\chi_1(n)=-\frac{V(n)Q(n+1)}{Q(n)},\quad \chi_2(n)=\frac{w}{Q(n)}, \tag{6}$$

где

$$Q(n)=z^g+\alpha_{g-1}(n)z^{g-1}+\ldots+\alpha_0(n).$$

Функции $V(n),W(n),Q(n)$ *удовлетворяют уравнению*

$$F_g(z)=Q(n-1)Q(n+1)V(n)+Q(n)(Q(n+2)V(n+1)+ \\ Q(n+1)(z-V(n)-V(n+1)-W(n))). \tag{7}$$

Замечательно, что уравнение (7) линеаризуется . А именно, если в (7) заменить n на $n+1$ и от полученного уравнение отнять (7), то результат делится на $Q(z,n+1)$. В итоге приходим к линейному уравнению на Q.

Функции $Q(n),\ V(n),\ W(n)$ удовлетворяют уравнению

$$Q(n-1)V(n)+Q(n)(z-V(n)-V(n+1)-W(n))- \\ Q(n+2)(z-V(n+1)-V(n+2)-W(n+1))-Q(n+3)V(n+2)=0. \tag{8}$$

Если Q удовлетворяет уравнению (8), то Q удовлетворяет уравнению (7) для некоторого $F_g(z)$.

Таким образом, нахождение пар коммутирующих операторов сводится к уравнению (8). Теорема 1 позволяет эффективно строить примеры коммутирующих операторов.

Теорема 2 *Оператор*

$$L_4=(T+(r_3n^3+r_2n^2+r_1n+r_0)T^{-1})^2+g(g+1)r_3n,\quad r_3\neq 0.$$

коммутирует с разностным оператором L_{4g+2}, где r_0, r_1, r_2, r_3 — произвольные параметры.

Теорема 3 *Оператор*

$$L_4 = (T + (r_1 a^n + r_0)T^{-1})^2 + g(g+1)mr_1 a^n, \quad r_1 \neq 0.$$

коммутирует с разностным оператором L_{4g+2}, где

$$m = \frac{a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1}{g(g+1)a^g},$$

r_0, r_1 — произвольные параметры.

Теорема 4 *Оператор*

$$L_4 = (T + (r_1 \cos(n) + r_0)T^{-1})^2 + r_2 \cos(n) + r_3 \sin(n), \quad r_1 \neq 0,$$

где

$$r_2 = -r_3 \cot(\frac{1}{2}), \qquad r_3 = 4r_1 \sin(\frac{1}{2}) \sin(\frac{g}{2}) \sin\frac{(1+g)}{2},$$

r_0, r_1 — произвольные параметры, коммутирует с разностным оператором порядка $(4g+2)$.

2.1 Дискретизация модулей Бейкера–Ахиезера и коммутирующие разностные операторы нескольких дискретных переменных

Введем понятие дискретного модуля Бейкера–Ахиезера (ДБА). С помощью ДБА-модулей мы построим коммутативные кольца разностных операторов с матричными коэффициентами со спектральными параметрами, принадлежащими многомерным алгебраическим многообразиям.

Определение 1 *Пусть X — алгебраическое многообразие, Y — подмногообразие в X. Множество $\mathbb{C}$-значных функций $\hat{M} = \{\psi(n,P) \,|\, n \in \mathbb{Z}^g, P \in X\}$ называется ДБА-модулем, если выполнены следующие условия.*

1. *$T_i\psi(n,P) \in \hat{M}$, где T_i — оператор сдвига по i-й дискретной переменной в $n = (n_1, ..., n_g)$.*

2. *$f(n)\psi(n,P) \in \hat{M}$, для произвольной функции $f(n)$.*

3. *$\lambda(P)\psi(n,P) \in \hat{M}$ для каждой мероморфной функции $\lambda(P)$ на X с полюсом на Y.*

4. *Сумма любых двух элементов из $\hat{M}$ принадлежит $\hat{M}$.*

Пусть A_Y — кольцо мероморфных функций на X с полюсом на Y, $\mathcal{T}_g = \hat{\mathcal{K}}[T_1, \dots, T_g]$ кольцо разностных операторов, где $\hat{\mathcal{K}}$ кольцо функций на $\mathbb{Z}^g$. Свойства 1–3 означают, что $\hat{M}$ является модулем над кольцом разностных операторов $\mathcal{T}_g$ и одновременно модулем на A_Y. Мы назовем $\hat{M}$ дискретным модулем Бейкера–Ахиезера (ДБА)-модулем.

Предположим, что $\hat{M}$ является свободным $\mathcal{T}_g$-модулем конечного ранга. Тогда ДБА-модуль позволяет построить коммутирующие разностные операторы нескольких переменных. Действительно, выберем свободный базис $\psi_1, \dots, \psi_N$ в $\hat{M}$ и рассмотрим векторнозначную функцию $\Psi = {}^t(\psi_1, \dots, \psi_N)$. Тогда в силу свободности $\mathcal{T}_g$-модуля $\hat{M}$ для $\lambda \in A_Y$ существует единственный разностный оператор с матричными коэффициентами $D(\lambda)$ такой, что

$$D(\lambda)\Psi = \lambda\Psi.$$

Аналогично для $\mu \in A_Y$, имеем

$$D(\mu)\Psi = \mu\Psi.$$

Операторы $D(\lambda)$ и $D(\mu)$ коммутируют, так как $\hat{M}$ является свободным и так как λ, μ не зависят от дискретной переменной n. Это означает, что семейство совместных собственных векторнозначны функций $\{\Psi(n,P)\}$, параметризованное точками X, достаточно велико и из коммутативности операторов на $\{\Psi(n,P)\}$ следует коммутативность на пространстве всех векторнозначных функций.

Мы построим свободные ДБА-модули по абелевым многообразиям с несингулярными тэта-дивизорами и по некоторым рациональным многообразиям посредством дискретизации соответствующих БА-модулей. Мы покажем, что базис БА-модуля задает базис соответствующего ДБА-модуля.

ДБА-модули на абелевых многообразиях

Пусть τ — точка верхней полуплоскости Зигеля, $\theta_{a,b}(z,\tau)$ — тэта-функция Римана с характеристиками ${}^t({}^ta, {}^tb)$, $a, b \in \mathbb{R}^g$, $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}^g +$

$\tau\mathbb{Z}^g$), $\Theta \subset X$ — тэта-дивизор, заданный нулями $\theta(z) := \theta_{0,0}(z,\tau)$ и пусть $\mathcal{L}_c$, $c \in \mathbb{C}^g$ плоское расслоение на X, для которого $\theta(z+c)/\theta(z)$ является мероморфным сечением. Мероморфные сечения $\mathcal{L}_c$ могут быть отождествлены с мероморфными функциями $f(z)$ на $\mathbb{C}^g$, которые удовлетворяют условию

$$f(z+m+\tau n) = exp(-2\pi i^t nc)f(z), \tag{9}$$

$m, n \in \mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$.

Пусть $L_c(m)$ — пространство мероморфных сечений $\mathcal{L}_c$ с полюсом на Θ порядка не выше чем m и $L_c = \cup_{m=0}^{\infty} L_c(m)$. Базис $L_c(m)$ может быть задан достаточно явно. А именно, для неотрицательного целого числа m и $a \in \mathbb{Z}^g/m\mathbb{Z}^g$ положим

$$F_{m,a}(z,c) = \theta_{a/m,0}(mz+c, m\tau)/\theta(z)^m.$$

Множество функций $\{F_{m,a}(z,c)\}$ является базисом в $L_c(m)$.

Обозначим через $\mathcal{K}$ кольцо мероморфных функций на $\mathbb{C}^g$ с координатами $x = (x_1, ..., x_g)$. Модуль Бейкера–Ахиезера M_c пары (X, Θ) имеет вид

$$M_c = \cup_{m=0}^{\infty} M_c(m), \quad M_c(m) = \sum_a \mathcal{K}F_{m,a}(z, c+x).$$

Мы дискретизируем M_c следующим образом.

Определим оператор T_i

$$T_i F(z,x) = F(z, x+h_i e_i)\frac{\theta(z-h_i e_i)}{\theta(z)}, \quad F(z,x) \in M_c,$$

где e_i — i-й единичный вектор в $\mathbb{C}^g$ и $h_i \in \mathbb{C}$ — параметр. Не сложно видеть, что T_i действует на M_c, так как он сохраняет соотношение (9) для L_{c+x}.

С функцией $f(x) \in \mathcal{K}$ мы ассоциируем отображение $\hat{f} : \mathbb{Z}^g \to \mathcal{K}$

$$\hat{f}(n) = f(x+nh),$$

где $n = (n_1, ..., n_g)$ и $nh = (n_1 h_1, ..., n_g h_g)$. Отождествим отображение $\hat{f}$ с его значением $\hat{f}(n)$. Пусть

$$\hat{\mathcal{K}} = \{\hat{f}(n) | f \in \mathcal{K}\}.$$

Таким образом мы можем рассматривать $\mathcal{K}$ как кольцо дискретных функций дискретного переменного $n \in \mathbb{Z}^g$.

Для неотрицательного целого m и $a \in \mathbb{Z}^g/m\mathbb{Z}^g$ определим отображение $\hat{F}_{m,a} : \mathbb{Z}^g \to M_c$

$$\hat{F}_{m,a}(n) = T^n F_{m,a}(z, c + x),$$

где $T^n = T_1^{n_1} \cdots T_g^{n_g}$. Отождествим отображение $\hat{F}_{m,a}$ с его значением $\hat{F}_{m,a}(n)$. Будем писать $\hat{F}_{m,a}(n, z)$, если необходимо указать зависимость от z.

Определим дискретный модуль Бейкера–Ахиезера $\hat{M}_c$

$$\hat{M}_c = \cup_{m=0}^{\infty} \hat{M}_c(m), \qquad \hat{M}_c(m) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^g/m\mathbb{Z}^g} \hat{\mathcal{K}} \hat{F}_{m,a}(n).$$

В явном виде

$$\hat{M}_c(m) = \sum_a \hat{\mathcal{K}} \frac{\theta_{a/m,0}(mz + c + x + nh, m\tau)}{\theta(z)^m} \prod_{j=1}^{g} \left(\frac{\theta(z - he_j)}{\theta(z)} \right)^{n_j} . \tag{10}$$

Укажем пример элементов в $\hat{M}_c(m)$ при $m = 1, 2$.

Пример.

$$\frac{\theta(z + c + x + nh)}{\theta(z)} \prod_{j=1}^{g} \left(\frac{\theta(z - he_j)}{\theta(z)} \right)^{n_j} \in \hat{M}_c(1),$$

$$\frac{\theta(z + c + x + nh + \beta)\theta(z - \beta)}{\theta^2(z)} \prod_{j=1}^{g} \left(\frac{\theta(z - he_j)}{\theta(z)} \right)^{n_j} \in \hat{M}_c(2),$$

где β произвольная константа в $\mathbb{C}^g$. Первый пример отвечает $m = 1$, $a = 0$ в (10).

Оператор T_i действует на $\hat{M}_c$ как оператор сдвига:

$$T_i \left(\hat{f}(n) \hat{F}_{m,a}(n) \right) = \hat{f}(n + e_i) \hat{F}_{m,a}(n + e_i).$$

Обозначим через $\mathcal{T}_g = \hat{\mathcal{K}}[T_1, ..., T_g]$ кольцо разностных операторов с коэффициентами в $\hat{\mathcal{K}}$. Тогда $\hat{M}_c$ становится $\mathcal{T}_g$-модулем.

Пусть $A = L_0$ является кольцом мероморфных функций на X с полюсом на Θ. Очевидно, что L_{c+x} является A-модулем. Это влечет, что кольцо A также действует на $\hat{M}_c$. На самом деле для $f(z) \in A$ выполнено равенство

$$f(z)F_{m,a}(z, c+x) = \sum_{m',a'} f_{m',a'}(x)F_{m',a'}(z, c+x), \tag{11}$$

для некоторых $f_{m',a'}(x) \in \mathcal{K}$, так как L_{c+x} является A-модулем. Заметим, что умножение на $f(z)$ коммутирует с действием T_i. Поэтому, применяя T^n к (11), получаем

$$f(z)\hat{F}_{m,a}(n) = \sum_{m',a'} \hat{f}_{m',a'}(n)\hat{F}_{m',a'}(n),$$

что означает $f(z)\hat{M}_c \subset \hat{M}_c$. Следовательно, $\hat{M}_c$ является $(\mathcal{T}_g, A)$-бимодулем.

Далее мы предполагаем, что Θ не сингулярен. Сформулируем нашу первую теорему.

Теорема 1 *Для несчетного множества $h \in (\mathbb{C}^*)^g$ модуль $\hat{M}_c$ является $\mathcal{T}_g$-модулем ранга $g!$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

Следствие 1 *Для h, указанных в Теореме 1, существует кольцевое вложение*

$$A \to \mathrm{Mat}(g!, \mathcal{T}_g).$$

ДБА-модули на рациональных многообразиях

Построим рациональное спектральное многообразие Γ отождествляя на $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{g-1}$ две гиперповерхности. Будем обозначать точки проективного пространства $\mathbb{C}P^{m-1}$ через $[t_1, ..., t_m]$, а точки m-мерного аффинного пространства через $(t_1, ..., t_m)$.

Зафиксируем a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{C}$ такие, что $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ и $[a_1, b_1] \neq [a_2, b_2]$. Пусть $\mathcal{P}$ невырожденное линейное отображение $\mathcal{P} : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g$, λ_j и $v_j, j = 1, \ldots, g$ собственные значения и собственные векторы $\mathcal{P}$. Будем предполагать, что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Обозначим индуцированное отображение $\mathbb{C}P^{g-1} \to \mathbb{C}P^{g-1}$ тем же символом $\mathcal{P}$.

Положим

$$\Gamma = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{g-1}/\{([a_1, b_1], t) \sim ([a_2, b_2], \mathcal{P}(t)),\ t \in \mathbb{C}P^{g-1}\}.$$

На Γ существует структура алгебраического многообразия.

Пусть $f(P), f_i(P), 1\dots,g$ функции зависящие от $P=(z_1,z_2,t_1,...,t_g)\in\mathbb{C}^{g+2}$ вида

$$f(z_1,z_2,t_1,\dots,t_n)=\sum_{j=1}^{g}(\alpha_j z_1 t_j+\beta_j z_2 t_j),\ \ \alpha_j,\beta_j\in\mathbb{C}, \tag{12}$$

$$f_i(z_1,z_2,t_1,\dots,t_g)=\sum_{k=1}^{g}\left(\alpha_{ik}z_1t_k+\beta_{ik}z_2t_k\right),\ \ \alpha_{ik},\beta_{ik}\in\mathbb{C}. \tag{13}$$

Предложение 1 *Для общих* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^{2g}$ *и* $(\alpha_i,\beta_i)\in\mathbb{C}^{2g}$, $i=1,...,g$, *существуют* A, $c_1,...,c_g\in\mathbb{C}^*$ *такие, что для всех* $t=(t_1,...,t_g)\in\mathbb{C}^g$ *функции (12), (13) удовлетворяют уравнениям:*

$$\begin{aligned} f(a_1,b_1,v_j) &\neq 0, \quad 1\le j\le g, && (14)\\ f(a_1,b_1,t)-Af(a_2,b_2,\mathcal{P}(t)) &= 0, && (15)\\ f_i(a_1,b_1,t)-c_if_i(a_2,b_2,\mathcal{P}(t)) &= 0, \quad 1\le i\le g. && (16)\end{aligned}$$

Согласно (15) уравнение

$$f(z_1,z_2,t_1,\dots,t_g)=0$$

корректно определяет гиперповерхность в Γ.

Для $\Lambda\in\mathbb{C}^*$, дискретный модуль Бейкера–Ахиезера $\hat{M}_\Lambda$ определяется аналогично случаю абелевых многообразий как дискретизация модуля Бейкера–Ахиезера. А именно,

$$\hat{M}_\Lambda=\cup_{k=0}^{\infty}\hat{M}_\Lambda(k), \tag{17}$$

$$\hat{M}_\Lambda(k)=\left\{\psi(n,P)=\frac{h(n,P)}{f(P)^k}\prod_{j=1}^{g}\left(\frac{f_j(P)}{f(P)}\right)^{n_j}\right\}, \tag{18}$$

где $h(n,P)=h(n,z_1,z_2,t)$ произвольные функции вида

$$h(n,P)=\sum_{0\le j\le k,|\alpha|=k}h_{j\,\alpha}(n)\,z_1^jz_2^{k-j}\,t^\alpha, \tag{19}$$

$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_g)$, $t^\alpha=t_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot t_g^{\alpha_g}$, удовлетворяющие уравнению

$$h(n,a_1,b_1,t)-\Lambda A^kh(n,a_2,b_2,\mathcal{P}(t))\prod_{j=1}^{g}\left(\frac{A}{c_j}\right)^{n_j}=0. \tag{20}$$

Это уравнение эквивалентно множеству однородных уравнений на $\{h_{j\alpha}(n)\}$, которые имеют нетривиальные решения при условиях Предложения 1. Заметим, что уравнение (20) может быть записано в виде

$$\psi(n, a_1, b_1, t) - \Lambda\psi(n, a_2, b_2, \mathcal{P}(t)) = 0. \tag{21}$$

Согласно (15), (16), (21), если $\psi \in \hat{M}_\Lambda(k)$, то $T_j\psi = \psi(n + e_i, P) \in \hat{M}_\Lambda(k+1)$. Следовательно, мы имеем g отображений

$$T_j : \hat{M}_\Lambda(k) \to \hat{M}_\Lambda(k+1),\ j = 1, \dots, g.$$

Теорема 2 *Для несчетного множества $h \in (\mathbb{C}^*)^g$ модуль $\hat{M}_\Lambda$ является свободным $\mathcal{T}_g$-модулем ранга g порожденным g функциями из $\hat{M}_\Lambda(1)$.*

Пусть A кольцо мероморфных функций на Γ с полюсом на дивизоре $(f = 0)$.

Следствие 2 *Для h определенных в Теореме 2 существует кольцевое вложение*

$$A \to Mat(g, \mathcal{T}_g).$$

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1.A.Mironov. *Self-adjoint commuting ordinary differential operators.* Inventiones mathematicae. Published online DOI 10.1007/s00222-013-0486-8.

2.А.Миронов. А.Накаяшики. *Дискретизация модулей Бейкера–Ахиезера и коммутирующие разностные операторы нескольких дискретных переменных.* Труды Московского математического общества. 2013. Т. 74. No. 2.

3. M. Bialy, A. Mironov. *From polynomial integrals of Hamiltonian flows to a model of non-linear elasticity.* Journal of Differential Equations. 2013. Vol. 255, No. 10, 3434-3446.

4.Т.Е.Панов, А.Е.Миронов. *Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях.* Успехи матем. наук. 2013. Т. 62, No. 2, 203–204.

5.Т.Е.Панов, А.Е.Миронов. *Пересечения квадрик, момент-угол многообразия и гамильтоново минимальные лагранжевы вложения.* Функцион. анализ и его прилож. 2013. Т. 47, No. 1, 47–61.

6. A.E. Mironov. *Commuting higher rank ordinary differential operators.* Proceedings of 6ECM, 2013, 459–473. DOI: 10.4171/120-1/27

3. Участие в конференциях и школах

1. Международная конференция, посвящённая 70-летию Виктора Матвеевича Бухштабера, Москва, 18–22 июня 2013 г.

2. Conference on integrability, topological obstruction to integrability and interplay with geometry, Barcelona, September 16 - September 20, 2013.

3. Workshop "Around Sato's Theory on Soliton Equations Tokyo, December 14- December 15, 2013.

4. Работа в научных центрах и международных группах

1. University of Science and Technology of China, Hefei.

2. Centre de recerca matematica, Barcelona.

3. Tsuda College, Tokyo.

5. Педагогическая деятельность

Спецкурс "Теория солитонов Новосибирский государственный университет.

Спецсеминар "Интегрируемые системы Новосибирский государственный университет.

Научное руководство.

Аспиранты: С. Агапов, В. Давлетшина, Г. Маулешева, Б. Сапарбаева.