Александр Долгобородов: отчет за 2014 год

1 Научные результаты и итоги за 2012 – 2014 годы

В этом году был подготовлен текст Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук "Распределение нулей аналитических функций из пространств Бергмана и пространств со смешанной нормой" , содержательную часть которой составили исследования и результаты, полученные в период 2012 – 2014 годов.

Предложенный в 2011 году план исследований предполагал работу по трем направлениям:

1. Продолжение изучения A^p_α-нулевых множеств с позиций классов $A^p_{q,\alpha}$.

2. Получение неулучшаемых необходимых условий на нулевые множества классов Бергмана и классов со смешанной нормой с весами более общими, чем степенные, в частности, охватить случай сколь угодно медленного роста средних Рисса.

3. Рассмотрение вопроса о зависимости нулевых множеств классов $A^p_{q,\alpha}$ от параметра p.

По итогам проведенной работы получены не только ответы на поставленные вопросы, но и разработаны новые в рамках тематики A^p_α-нулевых множеств приемы и средства доказательств.

К ним отнесем метод построения функций из A^p_α с определенными свойствами их нулевых множеств. В работе Ч.Горовица "Zeros of functions in the Bergman spaces"(1974), в которой были рассмотрены оценки произведений $\pi_n(f)$, принадлежность построенных функций классам A^p_α устанавливалась с помощью соответствующих оценок тейлоровских коэффициентов этих функций и интерполяционной теоремы Рисса-Торина. Оценки на коэффициенты гарантировали принадлежность функций тем или иным классам Бергмана. Вполне аналогичная схема была использована Е.Беллером при изучении уклонений $1 - |z_n(f)|$. Схему с тейлоровскими коэффициентами построенных функций применял также А.М.Седлецкий при оценке функций кратности $n(r; f)$.

В свете результатов диссертации понятно, что окончательные результаты в рамках данной схемы можно получить лишь в случае $p = 2$. Это связано с тем, что достаточные условия принадлежности аналитических функций классам A^p_α (выраженные через их тейлоровские коэффициенты), являясь неулучшаемыми при $p \geq 2$, не являются необходимыми при $p > 2$. Еще более сложным в этом отношении является случай $0 < p < 2$.

В диссертации осуществлен общий подход к построению примеров к оценкам различных характеристик нулевых множеств, не связанный с оценками тейлоровских коэффициентов. В своей существенной части он основан на свойствах функции, построенной в лемме 1 и на леммах о считающих функциях, таких как, например, лемма 2.

Лемма 1. *Пусть*

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{z}{r_k}\right)^{n_k-n_{k-1}}\right), \tag{1}$$

где $r_k=1-t_k$, $1/2>t_1>\ldots>t_k\to 0$, $n_0=0$, $n_k\in\mathbb{N}$ $(k=1,2,\ldots)$, n_k- $-n_{k-1}\uparrow\infty$ $(k\to\infty)$. *Тогда если* $n_kt_{k+1}\le a=\text{const}$, *а*

$$\sigma:=\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{-n_kt_k\}<\infty, \tag{2}$$

то для любых $q>0$ *и* $\gamma>0$ *существует такая постоянная* $c=c(q,\gamma,\sigma,a)$, *что при некотором* $m\in\mathbb{N}$ *и любом* $k>m$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{2t_k}^{2t_m}(M_\infty(f;1-t)t^\gamma)^q\,\frac{dt}{t}\le c\int\limits_{2t_k}^{2t_m}(M_0(f;1-t)t^\gamma)^q\,\frac{dt}{t}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Для любой функции* $\varepsilon(t)\in\mathcal{E}$ *и любых положительных* q *и* γ *существует такая считающая функция* $n(r)$, *что*

1. $n(r)=n_k$ *при* $1-t_k<r\le 1-t_{k+1}$, $\frac{1}{2}>t_1>\ldots>t_k\to 0$, *где*
$$n_k=\frac{\gamma}{t_k}\log\left(\frac{\varepsilon(t_k)}{t_k}\log\frac{\varepsilon(t_k)}{t_k}\right)\in\mathbb{N}; \tag{4}$$
2. *для усреднения* $N(r)$ *выполняется условие* $\exp N(1-t)\in\Phi_{q,\gamma}$;
3. *для некоторой последовательности* $\beta_k\downarrow 0$ $(k\to\infty)$
$$\exp N(1-\beta_k)\ge\left(\frac{\varepsilon(\beta_k)}{3\beta_k}\right)^\gamma; \tag{5}$$
4. $$\beta_k=\frac{t_k}{\log(\varepsilon(t_k)/t_k)}\sim\frac{\gamma}{n_k}\ (k\to\infty),\ \ \beta_k\in(t_{k+1},t_k); \tag{6}$$
5. $n_kt_{k+1}\le a=\text{const}\ \ (k=1,2,\ldots)$;
6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\exp(-n_kt_k)<\infty$.

Достаточно эффективным средством получения новых результатов оказалось изучение A^p_α-нулевых множеств в более общих пространствах со смешанной нормой $A^p_{q,\alpha}$ ($A^p_\alpha=A^p_{p,\alpha}$) и более удобных для этого пространствах $H^p_{q,\gamma}$ ($\gamma=(\alpha+$ $+1)/p$). Оно было вызвано не стремлением к большей общности, а существом возникающих задач в рамках пространств A^p_α. Так, например, при фиксированной величине $(\alpha+1)/p=\gamma$ лишь параметр q влияет на частоту последовательности $\{n_k\}$. Параметр p здесь фактически не задействован, так что условие $p=q$ не позволяет в полной мере выявить интересующие нас свойства нулевых множеств. Именно параметр q помогает на этом пути установить различие нулевых множеств пространств $A^{p_1}_{\alpha_1}$ и $A^{p_2}_{\alpha_2}$ в случае $(\alpha_1+1)/p_1=(\alpha_2+1)/p_2,\ p_1\neq p_2$.

Еще одно новшество – это рассмотрение подпространств пространства $H^p_{q,\gamma}$, определяемых посредством ограничений (мажорант $\nu(t)$, $\varepsilon(t)$, $\eta(t)$) на рост характеристик $n(r;f)$, $1-|z_n(f)|$, $\pi_n(f)$. Полученные условия на модули нулей экстремальных ("крайних") функций представляют собой целый спектр необходимых неулучшаемых условий на нулевые множества функций из $H^p_{q,\gamma}$. Условия эти (выраженные в терминах подпоследовательностей номеров $\{n_k\}$ нулей $z_n(f)$) зависят от мажорант и проявляются, когда мажоранты лежат в определенных пределах (например, $\eta(t)\geq(\log e/t)^{-\frac{1}{q}}$). На этом пути выясняется, что общим свойством распределения модулей нулей экстремальных функций f является иррегулярность, выражающаяся в заметно разном поведении подпоследовательностей $\{z_{n_k}(f)\}$ одной и той же последовательности нулей $\{z_n(f)\}$.

Это обстоятельство осложняет задачу обозримого единообразного описания нулевых множеств пространств $H^p_{q,\gamma}$. Ее решение в достаточно простых "геометрических" терминах становится проблематичным. Не исключено, что задачу целесообразно решать раздельно для двух случаев: условно говоря, для функций с "регулярным изменением" и для функций с "нерегулярным изменением" . С этой точки зрения результаты диссертации относятся, прежде всего, ко второму случаю – описанию нулевых множеств функций с "нерегулярным изменением".

2 Опубликованные и поданные в печать работы

В этому году занимался завершением подготовки диссертации к защите. Новых работ в печать не подавал.

3 Участие в конференциях и школах

В этом году в конференциях и школах участия не принимал.

4 Педагогическая деятельность

В 2014 году я проводил семинарские занятия со студентами по математическому анализу, теории функций комплексного переменного, линейной алгебре, аналитической геометрии и дифференциальным уравнениям на кафедре №30 Высшей математики НИЯУ МИФИ.