КОМБИНАТОРИКА ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ. ОТЧЁТ ЗА 2012 ГОД.

Н. Ю. ЕРОХОВЕЦ.

1. Результаты, полученные в этом году

I. В центре внимания торической топологии лежит сопоставление каждому простому выпуклому n-мерному многограннику P с m гипергранями $(m+n)$-мерного *момент-угол многообразия* $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием n-мерного компактного тора $T^m = (S^1)^m$, таким что $\mathcal{Z}_P/T^m = P$. Эквивариантный топологический тип этого многообразия зависит только от комбинаторного типа многогранника, что позволяет изучать комбинаторику многогранника при помощи топологии момент-угол многообразия и наоборот. Например, числа Бетти $\beta^i(\mathcal{Z}_P)$ являются комбинаторными инвариантами многогранника P. На этом пути возникает *инвариант Бухштабера* $s(P)$, равный размерности максимальной торической подгруппы $H \subset T^m$, $H \simeq T^s$, действующей свободно на $\mathcal{Z}_P$. Для этого числа верны оценки $1 \leqslant s(P) \leqslant m-n$, причём в случае $s(P)=1$ многогранник P является симплексом (то есть $m-n=1$), а в случае $s(P)=m-n$ фактор-пространство $\mathcal{Z}\,/T^{m-n}$ является $(2n)$-мерным многообразием со стандартным действием n-мерного тора T^n, таким что $M^{2n}/T^n = P$. Многообразия M^{2n} называются *квазиторическими*. Их конструкция была впервые предложена М. Дэвисом и Т. Янушкевичем в качестве топологических аналогов алгебраических торических многообразий. Однако, не для всех многогранников существует хотя бы одно квазиторическое многообразие. В связи с этим в 2002 году В. М. Бухштабером была поставлена задача получить эффективное описание числа $s(P)$ в терминах комбинаторики многогранника P. Случай $s(P)=2$ является первым нетривиальным. Как было показано автором, для любого k существует многогранник P с $m-n=k$, у которого $s(P)=2$.

Для произвольного симплициального комплекса K на m вершинах определён момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ с каноническим действием тора T^m, причём для граничного комплекса $K=\partial P^*$ симплициального многогранника P^*, полярного к простому многограннику P, имеется эквивариантный гомеоморфизм $\mathcal{Z}_K \simeq \mathcal{Z}_P$. Таким образом, число Бухштабера определено для любого симплициального комплекса K, причём $s(P) = s(\partial P^*)$. Определены вещественный аналог $\mathbb{R}\mathcal{Z}$ момент-угол комплекса с действием $\mathbb{Z}_2^m$ и вещественный аналог $\mathrm{s}_{\mathbb{R}}(P)$ числа Бухштабера, причём $s(K) \leqslant \mathrm{s}_{\mathbb{R}}(K)$ и для $r=1,2,3$ имеем: $s(K) \geqslant r$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{s}_{\mathbb{R}}(K) \geqslant r$.

Удобное описание симплициального комплекса $K = \{\sigma \subset [m] = \{1,\dots,m\}\}$ даёт множество $N(K)$ его минимальных несимплексов, то есть таких подмножеств $\omega \subset [m]$, что $\omega \notin K$, но любое собственное подмножество $\sigma \subset \omega$ является симплексом в K. Например, в этих терминах описывается кольцо Стенли-Райснера

$$\mathbb{Z}[K] = \mathcal{Z}[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m]/(\boldsymbol{v}_{i_1},\dots,\boldsymbol{v}_{i_k}\colon \{i_1,\dots,i_k\} \in N(K))$$

Легко показать, что $s(K)=1$ тогда и только когда $N(K) \neq \varnothing$ и любые два и любые три минимальных несимплекса имеют непустое пересечение.

В работе [Er12b] развита теория инварианта Бухштабера выпуклых симплициальных комплексов с точки зрения множества минимальных несимплексов. Получены следующие основные результаты.

Преддложение 1. *Имеем:*

(1) $s(K) \geqslant k$ *тогда и только тогда, когда существует такая матрица* $S \in \mathrm{Mat_{m\times k}}(\mathbb{Z})$, *что для любого простого* p *и для любого вектора* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}_p^k \setminus \{0\}$ *существует минимальный несимплекс* $\omega(\boldsymbol{a}) \in N(K)$, *такой что* $\langle \boldsymbol{a}, S^i \rangle \neq 0 \mod p$ *для всех строк* S^i *с номерами* $i \in \omega(\boldsymbol{a})$;

(2) $\mathrm{s}_{\mathbb{R}}(K) \geqslant k$ *тогда и только тогда, когда существует такое отображение* $\mathbb{Z}_2^k \setminus \{0\} \to N(K)$, *что* $\xi(\boldsymbol{a}_1) \cap \dots \cap \xi(\boldsymbol{a}_{2r+1}) = \varnothing$ *для любой минимальной линейной зависимости* $\boldsymbol{a}_1 + \dots + \boldsymbol{a}_{2r+1} = 0$ *в* $\mathbb{Z}_2^k$.

Теорема 2. *Имеем:* $s(K) = 2$ *тогда и только тогда, когда существуют два или три минимальных несимплекса с непустым пересечением и* $N(K)$ *не содержит ни одного из подмножеств вида:*

(1) $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7\}$: $\tau_1 \cap \tau_2 \cap \tau_4 = \varnothing$; $\tau_1 \cap \tau_3 \cap \tau_5 = \varnothing$; $\tau_1 \cap \tau_6 \cap \tau_7 = \varnothing$;

$\tau_2 \cap \tau_3 \cap \tau_6 = \varnothing$; $\tau_2 \cap \tau_5 \cap \tau_7 = \varnothing$; $\tau_3 \cap \tau_4 \cap \tau_7 = \varnothing$; $\tau_4 \cap \tau_5 \cap \tau_6 = \varnothing$;

(2) $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6\}$: $\tau_1 \cap \tau_3 = \varnothing$; $\tau_1 \cap \tau_2 \cap \tau_4 = \varnothing$; $\tau_1 \cap \tau_2 \cap \tau_5 = \varnothing$;

$\tau_1 \cap \tau_4 \cap \tau_6 = \varnothing$; $\tau_1 \cap \tau_5 \cap \tau_6 = \varnothing$; $\tau_2 \cap \tau_3 \cap \tau_6 = \varnothing$; $\tau_3 \cap \tau_4 \cap \tau_5 = \varnothing$;

(3) $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5\}$: $\tau_1 \cap \tau_2 = \varnothing$; $\tau_1 \cap \tau_5 = \varnothing$; $\tau_1 \cap \tau_3 \cap \tau_4 = \varnothing$;

$\tau_2 \cap \tau_3 \cap \tau_5 = \varnothing$; $\tau_2 \cap \tau_4 \cap \tau_5 = \varnothing$;

(4) $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$: $\tau_1 \cap (\tau_2 \cup \tau_3 \cup \tau_4) = \varnothing$; $\tau_2 \cap \tau_3 \cap \tau_4 = \varnothing$;

(5) $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$: $\tau_1 \cap \tau_2 = \tau_1 \cap \tau_3 = \tau_2 \cap \tau_3 = \varnothing$.

Эти результаты позволяют сформулировать задачи:

Задача 1. Классифицировать все симплициальные комплексы с $s(K) = 2$;

Задача 2. Классифицировать все простые многогранники с $s(P) = 2$;

Важными комбинаторными характеристиками симплициального комплекса, напрямую связанными с минимальными несимплексами, являются биградуированные числа Бетти

$$\beta^{-i,2j}(K) = \operatorname{rank} \operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}) = \operatorname{rank} \mathrm{H}^{-i,2j}[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K], d],$$

где $\operatorname{bideg} u_i = (-1, 2)$, $\operatorname{bideg} v_i = (0, 2)$, $du_i = v_i$, $dv_i = 0$. Например, $\sum_j \beta^{-1,2j} = |N(K)|$.

Задача 3. В терминах биградуированных чисел Бетти дать критерий того, что $s(K) = 2$.

II. Другим направлением исследований была проблема *флаговых чисел* выпуклых многогранников – описать всевозможные наборы чисел $\{f_S\}_{S \subseteq \{0,\dots,n-1\}}$, для которых существует выпуклый n-мерный многогранник, такой что $f_{\{a_1,\dots,a_k\}}$ – число вложенных цепочек граней $F_1 \subset \dots \subset F_k$, $\dim F_i = a_i$. В 2012 году был написан совместный обзор [BEP13], который выйдет как приложение к переводу книги Г. Циглера «Лекции о многогранниках». В обзор вошёл раздел «Квазисимметрические функции и флаговые векторы». В центе внимания этого раздела лежит введённое В. М. Бухштабером кольцо выпуклых многогранников $\mathfrak{P}$ – градуированная свободная абелева группа, порождённая всеми комбинаторными выпуклыми многогранниками ($\deg P^n = 2n$), с умножением, задаваемым прямым произведением, и кольцо флаговых векторов $\mathfrak{F} = \mathfrak{P}/\sim$, где $a_1P_1 + \dots + a_iP_i \sim b_1P_1 + \dots + b_iP_i$ тогда и только тогда, когда $a_1f_S(P_1) + \dots + a_if_S(P_i) = b_1f_S(P_1) + \dots + b_if_S(P_i)$ для всех S. Пространство флаговых векторов n-мерных многогранников имеет размерность, равную числу Фибоначчи c_n ($c_0 = c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$, $n \geqslant 1$), причём всю информацию о флаговых числах многогранника P можно записать при помощи однородного некоммутативного многочлена $\Xi(P)$ от переменных $\boldsymbol{c}$, $\deg \boldsymbol{c} = 2$, и $\boldsymbol{d}$, $\deg \boldsymbol{d} = 4$. Этот многочлен называется *$\boldsymbol{cd}$-индексом.*

В процессе работы над обзором было замечено, что многие геометрические операторы на кольце выпуклых многогранников корректно определены на кольце флаговых векторов. В частности, был рассмотрен оператор K степени -4 на кольце многогранников, который возникает из геометрической интерпретации $\boldsymbol{cd}$-индекса, данной К. Ли . Этот оператор определён неоднозначно, однако при переходе к кольцу флаговых векторов эта неоднозначность пропадает. Для него верна формула:

$$2\Xi(P) = \Xi[(d - (2C - B)K)P]\boldsymbol{c} + 2\Xi(KP)\boldsymbol{d},$$

где dP – сумма гиперграней многогранника P, C и B – операторы пирамиды и бипирамиды соответственно. Оператор K открывает новые перспективы для дальнейших исследований.

III. Была рассмотрена следующая задача: *Найти критерий того, что для градуированной алгебры Хопфа $\mathbb{Q}\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\rangle, \deg \boldsymbol{c} = 2, \deg \boldsymbol{d} = 4$, и градуированного хопфовского идеала J алгебра Хопфа $(\mathbb{Q}\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\rangle/J)^*$ является алгеброй полиномов, у которой в каждой чётной размерности ровно одна образующая.* Эта задача связана с гипотезой В. М. Бухштабера о когомологиях алгебры Ли L_1 формальных векторных полей на прямой, обращающихся в нуль вместе с первой производной в начале координат, и важна для понимания связи кольца выпуклых многогранников с кольцом комплексных кобордизмов.

Был применён метод изучения алгебр Хопфа при помощи слов Линдона и получены условия в размерностях, не больше 8. Предполагается продолжить работу в этом направлении.

IV. Совместно с А. И. Гарбером и А. А. Гаврилюком участвовал в переводе и редакции книги Г. Циглер, *Лекции о многогранниках*, Москва, МЦНМО, 2013 (под редакцией Н. П. Долбилина). Это один из наиболее современных учебников по теории выпуклых многогранников, который даёт обзор классических и самых последних подходов к изучению многогранников и содержит много примеров.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

[BEP13] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, Т. Е. Панов, *Алгебра и комбинаторика выпуклых многогранников*, приложение к переводу книги Гюнтер Циглер, *Лекции о многогранниках*, Москва, МЦНМО, 2013.

[Er12a] Nickolai Erokhovets, *Ring of flag vectors of convex polytopes*, тезисы международной топологической конференции «Алекасндровские чтения», Москва, 2012, с. 23-24.

[Er12b] Nickolai Erokhovets, *Criterion for the Buchstaber invariant of simplicial complexes to be equal to two*, представлена в arXiv, выйдет 17.12.2012.

3. Участие в конференциях и школах

(1) Рождественские математические встречи фонда Дмитрия Зимина «Династия», 8-10 января 2012, НМУ.
Доклад *Деформация умножения в градуированных алгебрах и торические g-полиномы.*

(2) Семинар «Глобус», 19 апреля 2012.
Доклад *Теория инварианта Бухштабера простых многогранников*,

(3) Международная топологическая конференция «Александровские чтения», 21-25 мая, 2012, Москва.
Доклад *Ring of flag vectors of convex polytopes.*

(4) Европейский математический конгресс, 2-7 июля, 2012, Краков, Польша.
Постерный доклад (в соавторстве с В. М. Бухштабером) *Ring of flag vectors.*

(5) Ярославская международная конференция «Дискретная геометрия» посвященная 100-летию А. Д. Александрова, 13-18 августа, 2012, Ярославль.
Доклад *Buchstaber Invariant of Simple Polytopes.*

4. Работа в научных центрах и международных группах

(1) Сотрудник лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» имени Б. Н. Делоне (грант Правительства РФ 11.G34.31.0053).

(2) В рамках русско-японского гранта РФФИ 12-01-92104-ЯФ-а участвовал (с небольшим докладом *Combinatorial characterization of simplicial complexes with* $s(K) = 2$) в русско-японской встрече на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова в сентябре 2012 года.

5. Педагогическая деятельность

На механико-математическом факультете МГУ

(1) Весной 2012 года вёл учебный семинар по линейно алгебре у первого курса механиков.

(2) Осенью 2012 года вёл учебный семинар по аналитической геометрии у первого курса механиков.

(3) Весь год помогал Т. Е. Панову и А. В. Пенскому проводить учебно-научный семинар «Геометрия и топология» для студентов и аспирантов. Программа этого семинара во многом связана с задачами в рамках проекта. В частности, в сентябре в течение трёх семинаров проводилась русско-японская встреча, в которой было много докладов про комбинаторику выпуклых многогранников, также в течение трёх семинаров мной была подробно разобрана статья Geir Agnarsson, «The flag polynomial of the Minkowski sum of simplices» по теме исследования.