КОМБИНАТОРИКА ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ. ИТОГОВЫЙ ОТЧЁТ ЗА 2014 ГОД.

Н. Ю. ЕРОХОВЕЦ.

1. Результаты, полученные в этом году

I. Торическая топология. [E14, E14t3, E14t4]

Напомним, что в центре внимания торической топологии лежит сопоставление каждому простому выпуклому n-мерному многограннику P с m гипергранями $(m+n)$-мерного *момент-угол многообразия* $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием тора $T^m = (S^1)^m$, таким что $\mathcal{Z}_P/T^m = P$. Эквивариантный топологический тип этого многообразия зависит только от комбинаторного типа многогранника, что позволяет изучать комбинаторику многогранника при помощи топологии момент-угол многообразия и наоборот. Например, числа Бетти $\beta^i(\mathcal{Z}_P)$ являются комбинаторными инвариантами многогранника P. На этом пути возникает *инвариант Бухштабера* $s(P)$, равный максимальной размерности торических подгрупп $H \subset T^m$, $H \simeq T^r$, действующих свободно на $\mathcal{Z}_P$. Верны оценки $1 \leqslant s(P) \leqslant m-n$, причём в случае $s(P) = 1$ многогранник P является симплексом (то есть $m-n=1$), а в случае $s(P) = m-n$ фактор-пространство $\mathcal{Z}/T^{m-n}$ является $(2n)$-мерным многообразием со стандартным действием n-мерного тора T^n, таким что $M^{2n}/T^n = P$. Многообразия M^{2n} называются *квазиторическими.* Их конструкция была впервые предложена М. Дэвисом и Т. Янушкевичем в качестве топологических аналогов алгебраических торических многообразий. Однако, не для всех многогранников существует хотя бы одно квазиторическое многообразие. В связи с этим в 2002 году В. М. Бухштабером была поставлена проблема получить эффективное описание числа $s(P)$ в терминах комбинаторики многогранника P. Случай $s(P) = 2$ является первым нетривиальным. Как было показано автором, для любого k существует многогранник P с $m-n=k$, у которого $s(P) = 2$.

Для произвольного *абстрактного симплициального комплекса* K на m вершинах (т.е. системы подмножеств $K = \{\sigma \subset [m] = \{1,2,\dots,m\}\}$, такой что $\varnothing \in K$ и если $\sigma_1 \subset \sigma_2$ и $\sigma_2 \in K$, то $\sigma_1 \in K$) определён момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ с каноническим действием тора T^m, причём для граничного комплекса $K_P = \partial P^*$ симплициального многогранника P^*, полярного к простому многограннику P, имеется эквивариантный гомеоморфизм $\mathcal{Z}_K \simeq \mathcal{Z}_P$. Таким образом, число Бухштабера определено для любого симплициального комплекса K, причём $s(P) = s(K_P)$. Определены вещественный аналог $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ момент-угол комплекса с действием $\mathbb{Z}_2^m$ и вещественный аналог $\mathrm{s}_{\mathbb{R}}(K)$ числа Бухштабера, причём $s(K) \leqslant \mathrm{s}_{\mathbb{R}}(K)$ и для $r = 1,2,3$ имеем: $s(K) \geqslant r$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{s}_{\mathbb{R}}(K) \geqslant r$.

Циклическим многогранником $C^n(m)$ называется выпуклая оболочка точек

$$\boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{x}(t_2), \dots, \boldsymbol{x}(t_m), t_1 < t_2 < \dots < t_m, m \geqslant n+2,$$

на кривой моментов $\boldsymbol{x}(t) = (t, t^2, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^n$. Все грани такого многогранника являются симплексами, поэтому двойственный многогранник $C^n(m)^*$ является простым. Комбинаторный тип многогранника не зависит от конкретного выбора точек

$t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Циклический многогранник является смежностным, то есть любые $[\frac{n}{2}]$ его вершин являются вершинами некоторой грани. Такие многогранники играют фундаментальную роль в теории многогранников, например они имеют максимальное число граней всех размерностей при фиксированном числе вершин (Теорема о верхней границе).

В 2012 году автором был получен критерий того, что число Бухштабера симплициального комплекса равно двум в терминах множества недостающих граней. В этом году применением этого критерия получен следующий результат:

Теорема 1. *Для простого многогранника $C^n(m)^*$ имеем: $s(C^n(m)^*) = 2$ тогда и только тогда, когда $n+2 \leqslant m < n+2+\frac{[\frac{n}{2}]+1}{3}$.*

Этот результат вошел в расширенную версию обзора [E14], который по техническим причинам вышел в другом журнале на год позже, по сравнению с тем, что было указано в отчете 2013 года. Отметим, что в опубликованном доказательстве содержится ошибка, которая уже устранена автором.

II. Кольцо выпуклых многогранников и проблема флаговых чисел. [E14t1,E14t2] В этом направлении в 2014 году получены следующие результаты:

1. [E14t2] Обобщена конструкция g-полинома деформации умножения в градуированном кольце.

Пусть $\mathbb{A}$ – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, и $A = \sum A^{2n}$, $n \geqslant 0$ – связная градуированная ассоциативная $\mathbb{A}$-алгебра. Рассмотрим градуированную коммутативную мультипликативную полугруппу S с единицей, такую что $\deg s = 2k > 0$ для $s \neq 1$. Пусть $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \{1\}$ – разложение S на две полугруппы. Обозначим через $A[S]$ градуированное кольцо, состоящее из всех конечных сумм $\sum a_s s$, где $\deg a_s s = \deg a_s + \deg s$ и умножение определяется правилом $(a_s s)(a_t t) = (a_s a_t)(st)$ и линейностью.

Пример 1. Например,

$$S = \{t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n}, n \geqslant 0\}, S_1 = \{t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} | p_1 a_1 + \dots + p_n a_n \geqslant 0\}, S_2 = \{t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} | p_1 a_1 + \dots + p_n a_n \geqslant 0\}$$

для некоторой фиксированной последовательности вещественных чисел $p_1, p_2, \dots$. В частности, можно выбрать $S = \{\alpha^k t^l\}$, $S_1 = \{\alpha^k t^l | k > l\}$ и $S_2 = \{\alpha^k t^l | k \leqslant l\}$.

Определение 1. *Деформацией* умножения в A называется кольцевой гомоморфизм $\Psi\colon A \to \mathbb{A}[S]$, такой что $\Psi(a) = a + \sum\limits_{s \neq 1} a_s s$.

Каждый гомоморфизм колец $A \to R$ может быть единственным образом продолжен до гомоморфизма колец $A[S] \to R[S]$.

Теорема 2. *Пусть $\Psi\colon A \to A[S]$ – деформация умножения в $\mathbb{A}$-алгебре A. Тогда*

1) Существует единственная пара $\mathbb{A}$-линейных отображений $\widetilde{G} = \widetilde{G}_\Psi\colon A \to \mathbb{A}[S_1]$ и $G = G_\Psi\colon A \to \mathbb{A}[S_2]$, такая что $\widetilde{G}(1) = G(1) = 1$ и $\widetilde{G} = G\Psi$.

2) Оба отображения $\widetilde{G}$ и G являются гомоморфизмами колец.

Эта абстрактная алгебраическая конструкция является обобщением более ранней конструкции автора для случая примера 1. Для частных случаев джойн-кольца выпуклых многогранников и кольца квазисимметрических функций старая конструкция давала известный торический g-полином Р. Стенли выпуклого многогранника и g-полином квазисимметрической функции Л. Биллеры, С. Хсиао и С. ван Виллигенбурга. Ожидается, что новая конструкция позволит построить обобщённый

g-полином выпуклого многогранника – производящую функцию флаговых чисел, мультипликативную относительно джойна и дающую торический g-полином Стенли при некоторой спецификации переменных.

2. [E14t1] $\boldsymbol{cd}$-индекс $\Xi(P)$ — многочлен степени n от некоммутирующих переменных $\boldsymbol{c}$ ($\deg c = 1$) и $\boldsymbol{d}$ ($\deg d = 2$), который кодирует все флаговые числа (т. е. числа цепочек вложенных граней фиксированных размерностей) выпуклого n-мерного многогранника P. Построен геометрический оператор K на выпуклых многогранниках, отвечающий геометрической реализации $\boldsymbol{cd}$-индекса Карлом Ли.

Утверждение 1. *Пусть P – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ и l – линейная функция общего положения. Для каждой гиперграни F рассмотрим пересечение $\boldsymbol{x}_F$ её опорной гиперплоскости с l. Для каждой гиперграни, кроме верхней и нижней, рассмотрим её проекцию из точки $\boldsymbol{x}_F$ на плоскость, ортогональную прямой l. Определим $\mathcal{K}(P)$ как элемент кольца выпуклых многогранников, равный сумме $(n-2)$-мерных многогранников, получающихся в результате проекций. Тогда $\Xi(P) = A\boldsymbol{c}+\Xi(\mathcal{K}(P))\boldsymbol{d}$ для некоторого некоммутативного многочлена A. Более того, $2A = \Xi((d-\mathcal{C}\mathcal{K})P)$, где dP –сумма всех гиперграней, а $\mathcal{C}P$ – разность удвоенной пирамиды над многогранником и бипирамиды над ним.*

Доказательство опирается на результаты К.Ли о геометрической реализации $\boldsymbol{cd}$-индекса. На основе этого оператора планируется получить новую интерпретацию неотрицательности коэффициентов $\boldsymbol{cd}$-индекса. Отметим, что в построении оператора $\mathcal{K}$ в приложении В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, Т.Е. Панов «Алгебра и комбинаторика многогранников» (2013) допущена ошибка: не произведён один из переходов к двойственному многограннику. В этом году ошибка исправлена. Аннотация результата приведена в [E14t1]

III. Комбинаторика флаговых многогранников. Простой многогранник называется флаговым, если любой набор $F_{i_1}, \dots, F_{i_k}$ его гиперграней, которые попарно пересекаются: $F_{i_s} \cap F_{i_t} \neq \varnothing$, имеет непустое пересечение $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$.

В работе В.Д. Володина [V.D. Volodin, Combinatorics of flag simplicial 3-polytopes, arXiv: 1212.4696] доказан следующий результат:

Теорема. *Трёхмерный простой многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда двойственный ему многогранник может быть стягиванием рёбер приведён к октаэдру так, что на каждом шаге получается многогранник, двойственный к флаговому.*

Для двойственного многогранника операция стягивания ребра соотвествует «распрямлению вдоль ребра», когда две соседние грани сливаются в одну. Эта операция не всегда определена и является обратной к операции срезки нескольких подряд идущих рёбер одной грани. Получено усиление результата В.Д. Володина

Теорема 3. *Трёхмерный простой многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда он может быть получен из куба последовательностью срезок рёбер, а также срезок пары соседних рёбер у не менее, чем пятиугольной грани.*

В комбинаторике простых многогранников известен следующий результат

Теорема (Эберхард, 1891). *Набор неотрицательных целых чисел чисел $\{p_k, k \geqslant 3, k \neq 6\}$ является набором чисел k-угольных граней трёхмерного простого многогранника* *тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = \sum_{k\geqslant 7}(k-6)p_k \qquad (1)$$

В одну сторону равенство легко выводится из формулы Эйлера, а в другую показывается, что можно построить простой многогранник с заданными числами граней. Число p_6 в теореме не участвует, то есть существует такое p_6, что $\{p_k, k\geqslant 3\}$ – числа k-угольных граней некоторого простого трёхмерного многогранника.

Получено обобщение теоремы Эберхарда для флаговых многогранников.

Теорема 4. *Набор неотрицательных целых чисел чисел $\{p_k, k\geqslant 4, k\neq 6\}$ является набором чисел k-угольных граней трёхмерного простого флагового многогранника тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$2p_4 + p_5 = \sum_{k\geqslant 7}(k-6)p_k \qquad (2)$$

Легко показать, что для флагового многогранника $p_3 = 0$. С другой стороны, если для произвольного простого многогранника с $p_3 = 0$ срезать одновременно все его рёбра, то получится флаговый многогранник, у которого k-угольные грани с $k\neq 6$ взаимно-однозначно соответствуют k-угольным граням срезаемого многогранника, а 6-угольные грани соответствуют 6-угольным граням и рёбрам.

По этим результатам готовится публикация.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

[E14] Н.Ю.Ероховец, «Теория инварианта Бухштабера симплициальных комплексов и выпуклых многогранников», Труды МИАН им. В.А.Стеклова, Т. 286(2014), 144-206.

[E14t1] Nikolay Y. Erokhovets, «Operators on the ring of convex polytopes and the cd-index», тезисы 13 Сербского математического конгресса, Врнячка Баня, Себрия, 2014, с. 81.

[E14t2] Nikolay Yurievich Erokhovets, «G-polynomial of deformation of multiplication in a ring», тезисы международной конференции «XVIII Геометрический семинар», Врнячка Баня, Сербия, 2014, с.37.

[E14t3] Nikolay Erokhovets, «Simple polytopes and simplicial complexes with Buchstaber number 2», Тезисы международной конференции «Топология торических действий и приложения к геометрии и комбинаторике», Тэджон, Республика Корея, 2014, с. 39-40.

[E14t4] Nikolay Erokhovets, «Buchstaber invariant – generalized chromatic number of simplicial complexes», Тезисы коротких докладов Международного конгресса математиков в Сеуле, Республика Корея, 2014, с. 164-165.

3. Участие в конференциях и школах

(1) Международная конференция «Торическая топология 2014 в Осаке», 20-24 января 2014, Осака, Япония.
Доклад *Buchstaber Invariant, 2-surfaces and matroids.*
(2) Научная конференция «Ломоносовские чтения», апрель 2014, Москва.
Доклад *Многогранники с малым числом Бухштабера.*

(3) Международная молодёжная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», 7-11 апреля 2014, Москва.
Доклад *Инвариант Бухштабера и многообразия Грассмана*
(4) Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 75-летию академика В.А. Садовничего, 21-23 апреля 2014, Москва.
Доклад *Кольцо флаговых векторов и его приложения.*
(5) 13 Сербский математический конгресс, 22-25 мая 2014, Врнячка Баня, Сербия.
Доклад *Operators on the ring of convex polytopes and the cd-index.*
(6) Международная конференция «XVIII Геометрический семинар», 25-28 мая 2014, Врнячка Баня, Сербия.
Доклад *G-Polynomial of Deformation of Multiplication in a Ring.*
(7) Международная конференция «Топология торических действий и приложения в геометрии и комбинаторике», 7-11 августа 2014, Тэджон, Южная Корея.
Доклад *Simple polytopes and simplicial complexes with Buchstaber number two.*
(8) Международный конгресс математиков 2014, 13-21 августа 2014, Сеул, Южная Корея.
Доклад *Buchstaber Invariant – Generalized chromatic number of simplicial complexes.*
(9) Международная конференция «Геометрия, топология и интегрируемость», 20-25 октября 2014, Москва.
Доклад *Комбинаторика простых многогранников с числом Бухштабера два.*

4. Работа в научных центрах и международных группах

(1) Участник русско-китайского гранта РФФИ 13-01-91151-ГФЕН-а «Действия торов: топология, геометрия и теория чисел» (руководитель Т.Е. Панов)
(2) Участник русско-английского гранта РФФИ 14-01-92612-КО-а «Топология и геометрия торических пространств и приложения» (руководитель В.М. Бухштабер).

5. Педагогическая деятельность

На механико-математическом факультете МГУ:

(1) Весной 2014 года вёл учебный семинар по линейно алгебре у первого курса механиков.
(2) Осенью 2014 года вёл учебный семинар по аналитической геометрии у первого курса механиков и в Казахстанском филиале МГУ.
(3) Совместно с Т. Е. Пановым и А. В. Пенским руководил учебно-научным семинаром «Геометрия и топология» для студентов и аспирантов. Программа этого семинара во многом связана с задачами в рамках проекта.
(4) Совместно с В.М. Бухштабером, Т.Е. Пановым и А.А. Гайфуллиным читал лекции спецкурса «Теория когомологий и её приложения»

6. Итоги 3 лет

В заявке было отмечено три направления исследований:

– Развитие теории дифференциальных колец выпуклых многогранников на основе методов теорий алгебр Хопфа и квазисимметрических функций, коммутативной и гомологической алгебры в направлении проблемы флаговых чисел.

– Развитие методов торической топологии в направлении комбинаторики простых многогранников.

– Развитие методов описания комбинаторики многогранников на основе теории групп перестановок.

I. Наибольшее развитие получило второе направление. Можно сказать, что за время проекта теория числа Бухшатеба симплициальных комплексов и выпуклых многогранников вышла на новый уровень. Отражением этого стал обзор [Ep14], куда вошли все полученные результаты. Основными новыми достижениями является следующие:

- Получен критерий того, что число Буштабера симплициального комплекса равно двум в терминах множества недостающих граней (2012), а также применение этого критерия для многогранников, двойственных к циклическим (2014).
- Обобщена формула А.А. Айзенберга для числа Бухштабера графов: для двумерных симплициальных комплексов найдены два числа, среди которых обязательно содержится число Бухштабера (2013).
- Описана взаимосвязь вещественного числа Бухштабера с матроидами и на основе известных результатов о бинарных матроидах дан критерий того, что вещественное число Бухштабера не меньше заданного числа r в терминах подкомплексов в двойственном по Александеру симплициальном комплексе (2013).
- Дано описание числа Бухштабера в терминах рациональных точек многообразий Грассмана (2013).

Из запланированных результатов не получилось проверить гипотезу, что для простых многогранников $s(P \times Q) = s(P) + s(Q)$.

II. Важную часть работы за три года составило участие в переводе и редактировании перевода книги Г. Циглера «Теория многогранников» и написании совместно с В.М. Бухштабером и Т.Е. Пановым приложения к этой книге под названием «Алгебра и комбинаторика многогранников».

III. В направлении проблемы флаговых чисел было проведено существенно меньше работы, чем было запланировано. Во многом это связано с ограниченностью времени, так что многие исследования всё ещё находятся в стадии планов. Основными результатами можно назвать обобщение конструкции g-полинома деформации умножения (2014) (это частичное продвижение в задаче поиска новых приложений конструкции обобщённого g-полинома) и построение геометрического оператора на кольце флаговых чисел, отвечающего геометрической реализации К. Ли $\boldsymbol{cd}$-индекса (2013-2014). В дальнейшем эти результаты планируется применить для построения обобщённого g-полинома выпуклого многогранника, построения g-полиномов квазиторических многообразий (одна из указанных в плане задач) и для получения новой интерпретации неотрицательности коэффициентов $\boldsymbol{cd}$-индекса.

Из запланированных задач совсем без рассмотрения остались задача о мультипликативных образующих кольца флаговых векторов.

IV. В направлении развития методов описания комбинаторики многогранников на основе теории групп перестановок, строго говоря исследования не производились. Однако если расширить задачу до просто описания комбинаторики актуальных классов выпуклых многогранников, то получены интересные результаты о комбинаторике простых флаговых многогранников.

- Получено обобщение теоремы Володина до следующего критерия: трёхмерный простой многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда он может быть получен из куба при помощи срезок рёбер и срезок пар рёбер у не менее, чем пятиугольных граней (2014). Это результат позволяет по-новому взглянуть на роль 2-усечённых кубов, рассмотренных В.М. Бухштабером и В.Д. Володиным.
- Получено обобщение теоремы Эберхарда о характеризации чисел k-угольных граней простого многогранника на случай флаговых многогранников (2014).

V. За прошедшие три года автор преподавал аналитическую геометрию и линейную алгебру на механико-математическом факультете МГУ (2012-2014) и в Казахстанском филиале (2 недели в 2013 году и 4 недели в 2014 году), участвовал в проведении (2012-2014) и руководстве (с осени 2014) учебно-научным семинаром «Геометрия и топология» для студентов и аспирантов, прочёл несколько лекций спецкурса «Теория когомологий и её приложения» (осень 2014), а также собрал материал для чтения указанного в плане спецкурса «Выпуклые многогранники» в будущем.