Николай Гусев: отчет за 2012 год

1 Результаты, полученные в этом году

Начну с описания результатов, полученных недавно совместно со Стефано Бьянкини (SISSA, Триест, Италия).

Пусть $b\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$ — векторное поле на d-мерном торе, где $d \in \mathbb{N}$. Будем считать, что поле b ограничено и соленоидально. Рассмотрим задачу Коши для уравнения неразрывности:

$$\begin{gathered} \partial_t u + \operatorname{div}(b \cdot u) = 0, \\ u|_{t=0} = u^\circ \end{gathered} \tag{1}$$

для неизвестной функции $u = u(t,x)$ с начальным условием u°. Если поле b является гладким, то существование и единственность классического решения задачи (1) можно установить с помощью метода характеристик. Если же поле b не является гладким, то существование обобщенного решения можно доказать с помощью *регуляризации*, т.е. аппроксимации поля b гладкими полями b_n и предельного перехода, основанного на слабой компактности решений соответствующих задач Коши для полей b_n (при этом используются априорные оценки, имеющие место для гладких решений). Вопрос о единственности обобщенного решения является более сложным. В случае пространств Соболева ($b \in W^{1,p}$, где $p \geq 1$) единственность была доказана ДиПерной и Лионсом. Позже Амброзио установил единственность в более общем случае векторных полей с ограниченной вариацией ($b \in BV$, т.е. полей из L^1, обобщенные производные которых могут быть не только элементами L^p, но и мерами Радона).

Ключевым моментом в доказательстве ДиПерны и Лионса является сильная сходимость так называемого *коммутатора*

$$r_\varepsilon := \partial_t u_\varepsilon + \operatorname{div}(b \cdot u_\varepsilon) \tag{2}$$

к нулю в L^1 при $\varepsilon \to 0$. Здесь $u_\varepsilon(t,x) := \big(\omega_\varepsilon(\cdot) * u(t,\cdot)\big)(x)$ — регуляризация функции u, где $\omega_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d}\omega(y/\varepsilon)$ — ядро усреднения (так называемая “шапочка”); звездочка означает свертку. Из (2) видно, что коммутатор является невязкой, возникающей в правой части уравнения неразрывности (1) при замене решения его регуляризацией.

Доказательство Амброзио также основано на изучении поведения коммутатора при $\varepsilon \to 0$. Однако в его работе устанавливается лишь *слабая* сходимость коммутатора к некоторой мере σ, не зависящей от выбора ω. Затем с помощью вариации ω показывается, что $\sigma = 0$.

В совместной работе со Стефано Бьянкини мы доказали, что в случае полей b с ограниченной вариацией можно подобрать ядра усреднения более общего вида $\omega_\varepsilon(x,y) := \frac{1}{\varepsilon^d}\Omega_\varepsilon(x, y/\varepsilon)$ таким образом, что сходимость соответствующего коммутатора r_ε к нулю при $\varepsilon \to 0$ будет *сильной* в L^1. Для подобных ядер усреднения регуляризация функции u дается формулой

$u_\varepsilon(t,x) = \big(\omega_\varepsilon(x,\cdot) * u(t,\cdot)\big)(x)$. (Если $\Omega_\varepsilon(x, y/\varepsilon) = \omega(y/\varepsilon)$, т.е. ядро усреднения не зависит от x, то данная формула переходит в стандартную.)

С помощью данного результата можно получить новое доказательство единственности обобщенного решения (1) для полей b с ограниченной вариацией. Кроме того, в дальнейшем мы планируем применить использованные нами методы к исследованию так называемой гипотезы Брессана. Один из вариантов этой гипотезы можно сформулировать следующим образом. Пусть дана последовательность ограниченных гладких векторных полей b_n, вариации которых ограничены равномерно по n. Пусть каждое поле b_n является *квазисоленоидальным* (англ. *nearly incompressible*), т.е. для каждого n уравнение $\partial_t \rho + \operatorname{div}(b_n \rho) = 0$ имеет ограниченное решение ρ: $0 < c < \rho < C$, причем константы c и C не зависят от n. Наконец, пусть последовательность b_n сходится в L^1 при $n \to \infty$. Тогда из последовательности решений u_n задач (1) с $b = b_n$ можно выделить подпоследовательность u_{n_k}, которая сильно сходится в L^1. (Следовательно, можно перейти к ещё одной подпоследовательности, сходящейся почти всюду.) Отметим, что аналогичное свойство для полей b из пространств Соболева было установлено Де Леллисом и Криппой.

Другим направлением работы были уравнения Навье–Стокса в $\mathbb{R}^3$ для баротропной слабо сжимаемой жидкости, т.е. среды с уравнением состояния $\rho = \rho_0 + \varepsilon R(p)$ (где функция R ограничена, $\rho_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ достаточно мало). Лионсом было доказано существования слабого решения для баротропной среды с уравнением состояния $p = \rho^\gamma$ при $\gamma \geq 9/5$. Позже Файрайзл доказал существование слабого решения при $\gamma > 3/2$. Методы, разработанные Файрайзлом, позволяют доказать существование слабого решения для среды с уравнением состояния вида $\rho = f(p)$, где $f \in C^\infty[0,\infty)$, $f(0) = 0$, $f' > 0$, $\lim_{p\to\infty} f(p) = r > 0$, $\lim_{p\to\infty} p(r - f(p))^3 > 0$. (Подобное уравнение состояния рассматривалось Файрайзлом и Дзангом в случае уравнений Навье–Стокса для плазмы.) По определению функции f плотность является априори ограниченной сверху константой r. Однако не совсем ясно, имеет ли место оценка плотности снизу. Кроме того, построение слабого решения уравнений Навье–Стокса основано на рассмотрении аппроксимации уравнения состояния $\rho = f(p)$ уравнениями вида $p = F_\alpha(\rho)$, где $F_\alpha^{-1} \to f$ при $\alpha \to 0$, а при каждом фиксированном $\alpha > 0$ функция $F_\alpha(\rho) \sim \rho^\gamma$ при $\rho \to \infty$ для некоторого (достаточно большого) $\gamma > 0$. Таким образом, ограниченность плотности не используется явно при построении решения. В связи с этим вопрос о разрешимости уравнений Навье–Стокса для слабо сжимаемой жидкости требует дальнейшего изучения. Интересным свойством данного класса жидкостей является то, что поле скорости в этом случае по определению является квазисоленоидальным (см. выше).

Отметим также что методы Лионса и Файрайзла, используемые при построении слабых решений уравнений Навье–Стокса, основаны на соображениях компактности и предельного перехода. Наиболее сложным моментом их доказательств является предельный переход в уравнении состояния: пусть последовательность давлений p_n сходится слабо к p, а последовательность плотностей ρ_n сходится слабо к ρ, причём $F(\rho_n, p_n) = 0$; тогда $F(\rho, p) = 0$. Для доказательства этого факта приходится установить сходимость плотности почти всюду; при этом используются громоздкие и в то же время очень тонкие рассуждения. Было бы интересно найти другой способ доказательства сходимости плотности почти всюду. Поскольку плотность, как известно, удовлетворяет уравнению неразрывности, планируется рассмотреть данный вопрос с помощью методов, использованных Де Леллисом и Криппой для решения гипотезы Брессана для векторных полей из пространств Соболева.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

- Gusev N.A. Asymptotic Properties of Linearized Equations of Low Compressible Fluid Motion. Journal of Mathematical Fluid Mechanics (2012), vol. 14, issue 3, pp. 591-618.

3 Участие в научных школах и конференциях

- Рождественские встречи Фонда Династия (Январь 2012, НМУ, Москва)
- Международная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения" в честь 90-летия Марка Иосифовича Вишика. (4-7 июня 2012 года, ИППИ, Москва)
- HYP2012: Fourteenth International Conference devoted to Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems. (25-29 June 2012, University of Padua, Italy)
- Workshop "Instabilities in Hydrodynamics". (27–31 August 2012, Institut Henri Poincaré, Paris, France)

4 Работа в научных центрах и международных группах

С сентября 2012 года я работаю в SISSA (Италия, г. Триест) в секторе функционального анализа.

5 Педагогическая деятельность

В весеннем семестре 2012 года я вел семинары по математическому анализу на кафедре высшей математики МФТИ.