

ОТЧЁТ ПО ГРАНТУ ФОНДА ДИНАСТИЯ ЗА 2014 ГОД

Р.Н. КАРАСЁВ

1. НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

В работе [1] мы продолжаем изучать задачи о бильярдах, предположительно связанные с гипотезой Малера о произведении объёмов выпуклого тела и его полярного тела. На этот раз мы рассматриваем случай не обязательно симметричной нормы, такую ситуацию можно назвать плоским финслеровым бильярдом.

Наша цель состоит в получении оценки снизу на длину замкнутой бильярдной траектории в выпуклом теле. Метод, разработанный Кароем Бездеком и Даниэлом Бездеком для случая евклидовой нормы, отлично работает и в случае несимметричной нормы. Это позволяет элементарно доказать известные факты про бильярды в нормированных пространствах (ранее доказанные симплектическими методами) и доказать точную оценку на длину кратчайшей замкнутой бильярдной траектории в выпуклом теле с нормой, в которой это выпуклое тело является единичным шаром. Правда оказывается, что несимметричный случай гипотезы Малера в принципе не может последовать из симплектической гипотезы Витербо.

Для симметричного выпуклого тела оценка снизу длины бильярдной траектории рассматривалась ранее в моей совместной работе с Я. Островером и Ш. Атрштейн-Авидан (Duke Math. J. 2014), и в этот раз удалось получить доказательство основного результата той работы в один абзац.

В статье [2] мы продолжаем применять симплектические методы к задачам выпуклой геометрии. На этот раз мы рассматриваем задачу Тарского–Банга о покрытии выпуклого тела полосками (областями между двумя параллельными гиперплоскостями) и некоторый аналог этой задачи. Мы пытаемся выяснить, что можно и что нельзя сделать в таких задачах с помощью симплектических методов.

Перевод этой задачи на симплектический язык, вместе с некоторыми результатами Кита Болла, позволяет сформулировать некоторую гипотезу о субаддитивности симплектических ёмкостей. Мы не можем установить свойство субаддитивности в полной общности, но всё же доказываем некоторые его частные случаи. Это позволяет доказывать некоторые утверждения, которые пока слабее основной гипотезы Банга. Также мы доказываем несколько результатов из этой серии несимплектическими методами, включая один новый частный случай задачи Банга в её исходной формулировке.

Текст [3] первоначально был написан моими соавторами Пабло Собероном и Эдгардо Ролданом-Пенсадо. Они изучали аналог теорем «о бутерброде» и «о делении ожерелья», в которых несколько мер одновременно делились на две или более равные части. Деление производилось последовательным рассечением частей гиперплоскостями, направления которых были фиксированы изначально.

Мой вклад в текст [3] представлен в разделе 4, где рассматриваются весьма общие разбиения Вороного и формулируется утверждение, одновременно обобщающее известную теорему Н. Алона «о делении ожерелья» и недавнюю теорему Р. Живалевича «о делении занавесками». После небольшой технической доработки это утверждение позволяет работать и с иерархическими разбиениями.

Больше информации доступно на www.rkarasev.ru.

2. КОНФЕРЕНЦИИ И ЛЕТНИЕ ШКОЛЫ

Сделал доклад “Covering dimension using toric varieties” на конференции “Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory” в МФТИ, 27 января – 02 февраля 2014.

Прочитал три лекции в летней школе Алгебра и Геометрия в июле 2014 года, посвящённые взаимодействию симплектической и выпуклой геометрии.

Сделал доклад “Bang’s problem and symplectic invariants” на конференции “Discrete Geometry” в Обервольфахе, 31 августа – 06 сентября 2014.

3. ОБЩИЙ ИТОГ ПО ТРЁМ ГОДАМ

За время гранта 2012–2014 годы было сделано около 15 работ. Наиболее широко была представлена тема «деление мер», в которой были получены разнообразные обобщения и аналоги «теоремы о бутерброде» в совместных работах с А. Акоюном, А. Убардом, Б. Ароновым, А. Балицким, А. Гарбером, П. Собероном и Э. Ролданом-Пенсадо. В этой теме ещё остаётся много разных открытых вопросов.

Также изучались близкие к делению мер темы, связанные с теоремой Борсука–Улама, Тверберга, центральными точками мер и задачей Кнастера. Сделано несколько работ совместно с И. Баранем, Б. Мачке, А. Воловиковым, П. Благоевичем, Б. Бухом и А. Холмсенем. Также сделан аналог теоремы Громова о поперечнике для раскрашивания дискретного куба в несколько цветов, независимо полученный и М. Матдиновым.

В последнее время стала развиваться тема (не обещанная в заявке трёхлетней давности), связанная с применением симплектических методов в классических задачах выпуклой геометрии. В первой моей работе по этой теме (совместно с Я. Островером и Ш. Атрштейн-Авидан) были изучены бильярды в единичном шаре нормированного пространства и доказано, что классическая гипотеза Малера о произведении объёмов единичных шаров исходного и двойственного пространства сводится к гипотезе Витербо в симплектической геометрии. Гипотеза Витербо для выпуклых тел $X \subset \mathbb{R}^{2n}$ выглядит так:

$$\text{vol } X \geq \frac{c_{HZ}(X)^n}{n!},$$

здесь $c_{HZ}(X)$ — ёмкость Хофера–Цендера X , которая для выпуклых тел равна минимальному симплектическому действию замкнутых характеристик на границе X . Гипотеза Витербо написана в предположении, что равенство достигается для симплектического шара, однако мы пытаемся применить её к множествам, для которых даже не всегда ясно, являются они симплектическими шарами или нет.

В случае, если \mathbb{R}^{2n} отождествлено с $V \times V^*$ (здесь V — вещественное линейное пространство), а $X = K \times L$ для некоторых выпуклых тел $K \subset V$ и $L \subset V^*$, то ёмкость Хофера–Цендера допускает интерпретацию в терминах замкнутых бильярдных траекторий в K , длина которых меряется в (не обязательно симметричной) норме, ассоциированной с телом L . Это позволяет изучать эту величину сравнительно элементарными методами, чем мы и продолжаем заниматься.

4. ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Продолжаю преподавать в МФТИ, читаю курс лекций по математическому анализу и веду семинары. В этом году начал читать спецкурс «Основы дискретной геометрии».

Занимаюсь подготовкой команды студентов МФТИ для участия в математических олимпиадах, в этом году команда участвовала в наиболее представительной студенческой олимпиаде ИМС 2014 в г. Благоевград, Болгария, и заняла третье место за сборной Израиля и командой университета Будапешта.

Руководил бакалаврской работой Алексея Балицкого, который был соавтором нескольких моих публикаций и недавно выложил свой собственный препринт arXiv:1409.5782.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A.V. Akopyan, A.M. Balitskiy, R.N. Karasev, A.V. Sharipova. Elementary approach to closed billiard trajectories in asymmetric normed spaces. *Arxiv preprint* arXiv:1401.0442 (2014).
- [2] A.V. Akopyan, R.N. Karasev, F.V. Petrov. Bang's problem and symplectic invariants. *Arxiv preprint* arXiv:1404.0871 (2014).
- [3] R.N. Karasev, E. Roldán-Pensado, P. Soberón. Measure partitions using hyperplanes with fixed directions. *Arxiv preprint* arXiv:1408.4830 (2014).