Отчет М. Скопенкова по гранту фонда «Династия» за 2012 год

1 Результаты, полученные в этом году

I. Дискретный комплексный анализ

Мотивировка. Различные построения комплексного анализа на плоских графах были предложены Р. Исааксом, Р. Даффином, Х. Мерка, И.А. Дынниковым - С.П. Новиковым, А. Бобенко - Х. Мерка - Ю. Сурисом, А. Бобенко - У. Пинкалем - Б. Шпрингборном. Первая из этих теорий, так называемая линейная дискретизация комплексного анализа на четырехугольной решетке, в настоящее время развивается особенно активно. Это связано с ее применениями в статистической физике (С. Смирнов и соавторы), численных методах (К. Хильдебрандт и соавторы), компьютерной графике (М. Вардецкий и соавторы), комбинаторной геометрии (Р. Кеньен). Дискретный комплексный анализ во многом аналогичен классическому комплексному анализу. Одна из самых естественных и в то же время трудных проблем состоит в том, чтобы доказать сходимость дискретной теории к непрерывной при неограниченном измельчении решетки.

Результаты. Основные результаты – сходимость дискретных гармонических функций на ортогональных решетках, а также дискретных матриц периодов и дискретных абелевых интегралов на триангулированных поверхностях к их непрерывным аналогам.

Четырехугольной решеткой называется граф Q, вложенный в комплексную плоскость, ребра которого - прямолинейные отрезки, а грани - четырехугольники (не обязательно выпуклые). Решетка называется ортогональной, если диагонали каждой грани перпендикулярны. Функция f, заданная на вершинах четырехугольной решетки и принимающая комплексные значения, называется дискретной аналитической, если для каждого четырехугольника разностные отношения этой функции вдоль обеих диагоналей равны друг другу. Иными словами, для каждого четырехугольника ABCD выполнено равенство

$$\frac{f(A)-f(C)}{A-C} = \frac{f(B)-f(D)}{B-D},$$

где точки A,B,C,D плоскости отождествлены с комплексными числами. Действительная часть дискретной аналитической функции называется дискретной гармонической функцией. Границей решетки Q называется граница ее внешней грани. Мы всегда будем считать, что граф Q - конечный, а его граница состоит из одной замкнутой кривой без самопересечений.

Пусть g - произвольная гладкая функция, заданная на комплексной плоскости и принимающая действительные значения. Задача Дирихле на решетке Q состоит в том, чтобы найти дискретную гармоническую функцию u=u[Q,g]:Q->R, совпадающую с заданной функцией g на границе решетки Q.

Теорема. Задача Дирихле на любой конечной четырехугольной решетке имеет единственное решение.

Будем говорить, что последовательность решеток {Qn} аппроксимирует область D комплексной плоскости, если при неограниченном возрастании n:

- максимальное расстояние от точки границы решетки Qn до границы области D стремится к нулю; и
- максимальная длина ребра решетки Qn стремится к нулю.

Будем говорить, что последовательность решеток {Qn} равномерна и невырождена, если существует постоянная const (не зависящая от n), такая что для каждого члена этой последовательности:

- отношение диагоналей каждого четырехугольника меньше const и угол между диагоналями больше 1/const; и
- количество вершин решетки в каждом диске радиуса, равного максимальной длине ребра решетки, меньше const.

Теорема. Пусть D - область на комплексной плоскости, ограниченная гладкой замкнутой кривой без самопересечений. Пусть g:C->R - гладкая функция. Возьмем равномерную и невырожденную последовательность конечных ортогональных решеток {Qn}, аппроксимирующих область D. Тогда решения u[Qn,g]:Q->R задачи Дирихле на решетках Qn сходятся к решению u[D,g] задачи Дирихле в области D (с такими же граничными значениями) равномерно на любом компактном подмножестве области D.

Данные результаты условно приняты к публикации (см позицию 1 в списке публикаций).

Пусть R – замкнутое ориентированное двумерное многообразие рода g, снабженное кусочно-плоской метрикой с изолированными особенностями. Пусть T – триангуляция многообразия R такая, что все особенности метрики являются вершинами T. Мы собираемся изучать многозначные функции на триангулированных римановых поверхностях. Точное определение мы не приводим здесь ввиду его громоздкости. Скажем лишь, что под многозначной функцией мы понимаем пару вещественнозначных функций, определенных на вершинах и на гранях универсальной накрывающей, соответственно, которые меняются на фиксированные числа при обходе образующих фундаментальной группы. Последние числа называются действительными и мнимыми частями периодов, соответственно. Так же, как и в непрерывной теории, периоды разбиваются на 2 группы: A-периоды и B-периоды. Многозначная дискретная аналитическая функция называется абелевым интегралом первого рода.

Теорема. Для любых комплексных чисел A_1,…,A_g существует дискретный абелев интеграл первого рода с A-периодами A_1,…,A_g. Он единственен с точностью до константы.

Для $l=1,\dots,g$ обозначим через f^l единственный (с точностью до константы) дискретный абелев интеграл все A-периоды которого, кроме l-го, нулевые, а l-й равен 1. Матрица P_T размера $g \times g$, l-й столбец которой – это набор B-периодов интеграла f^l, называется матрицей периодов триангуляции T. Это дискретный аналог матрицы периодов P_R римановой поверхности R.

Теорема. Существуют две константы $Const_R$, $const_R>0$, зависящие только от поверхности R, такие что для любой триангуляции T поверхности R с максимальным радиусом описанной окружности грани $r<const_R$ выполнено неравенство $\|P_T-P_R\|<Const_R\, r$.

Доказательства этих результатов представлены к публикации (см позицию 9 в списке публикаций).

II. Классификация циркулярных поверхностей

Мотивировка. В современной архитектуре четко прослеживается курс на конструкции свободной формы, воплощенный в работах таких знаменитых архитекторов, как Ф. Гери и З. Хадид. В то время как компьютерное моделирование конструкций свободной формы доступно стандартными средствами, их реальное воплощение остается трудной задачей. Для того, чтобы конструкцию свободной формы можно было изготовить на практике, необходим специальный процесс рационализации. Это означает, что гладкая поверхность заменяется на некоторую решетку, составленную из отдельных панелей со специальными свойствами.

Как один из подходов к рационализации, П. Бо и соавторы предложили так называемые конструкции из дуг окружностей. Конструкция из дуг окружностей - это граф, ребра которого реализованы в виде дуг окружностей, сходящихся в каждой вершине под равными углами и имеющих в ней общую касательную плоскость. На рисунке 1 изображены две конструкции из дуг окружностей, имеющие (локально) комбинаторику квадратной и треугольной решетки, соответственно. В первом случае конструкция состоит из двух семейств сплайнов, состоящих из дуг окружностей, пересекающих друг друга под прямым углом. Во втором случае мы видим 3 семейства сплайнов, пересекающихся под углом 60 градусов.

Следующие фундаментальные проблемы близки к рассматриваемой прикладной задаче. Откажемся от требования равенства углов, но потребуем, чтобы конструкция была образована цельными дугами окружностями, а не просто сплайнами из них. Естественные вопросы состоят в том, какие конструкции можно построить из двух и более семейств окружностей, и какие гексагональные ткани можно образовать из окружностей. Хотя решение данных проблем не имеет непосредственных приложений в архитектуре, есть основания полагать, что разработанные методы окажутся полезными для последующих прикладных исследований.

Результаты. Первый результат – описание гладких поверхностей, содержащих прямую и окружность через каждую точку. Под гладкой поверхностью мы понимаем образ бесконечно дифференцируемого инъективного отображения 2-мерной плоскости в 3-мерное вещественное пространство, дифференциал которого нигде не обращается в ноль.

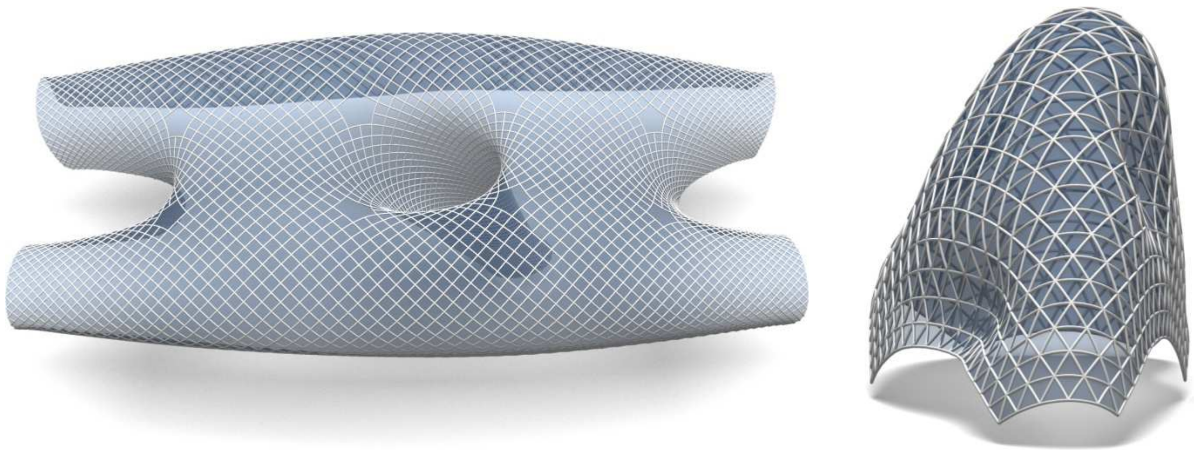

Рисунок 1 (из статьи 2). Примеры конструкций из дуг окружностей (слева направо): конструкция в виде четырехугольной решетки, покрывающая архитектурный дизайн; конструкция в виде треугольной решетки на Эйндховенском куполе, принадлежащая архитектору М. Фуксасу. Изучение таких конструкций служит мотивировкой одному из направлений исследований – теории циркулярных поверхностей.

Теорема. Если через каждую точку гладкой поверхности в 3-мерном пространстве можно провести одновременно отрезок прямой и дугу окружности, целиком лежащие на поверхности (не касающиеся друг друга и непрерывно зависящие от этой точки), то рассматриваемая поверхность является либо однополостным гиперболоидом, либо квадратичным конусом, либо эллиптическим цилиндром, либо плоскостью.

Циклидой называется поверхность в 3-мерном пространстве, заданная уравнением вида

$$a(x^2+y^2+z^2)^2 + (bx+cy+dz)(x^2+y^2+z^2) + Q(x,y,z)=0,$$

где a,b,c,d - постоянные, а Q(x,y,z) - многочлен степени не выше 2, не обращающиеся в нуль одновременно.

Теорема. Пусть гладкая поверхность в R^3 гомеоморфна сфере или тору. Если через каждую точку этой поверхности можно провести не менее 4 дуг окружностей, целиком лежащих на поверхности (и непрерывно зависящих от этой точки), то она является циклидой.

Данные результаты опубликованы в статье 6.

2 Список наиболее значимых публикаций

№ п/п	Публикация[1]	ISSN журнала	Импакт-фактор журнала[2]	Организация, представившая статью[3]
1	**2**		**3**	**4**
1.	M. Skopenkov, Boundary value problem for discrete analytic functions, Adv. Math. (2012), conditionally accepted.	0001-8708	1.177 Интернет-сайт журнала	ИППИ РАН, Университет науки и техники короля Абдулы
2.	H. Pottmann, L. Shi, M. Skopenkov, Darboux cyclides and webs from circles, Computer Aided Geom. Design 29:1 (2012), 77-97.*	0167-8396	0.859 Интернет-сайт журнала	ИППИ РАН, Университет науки и техники короля Абдулы
3.	M. Skopenkov, H. Pottmann, Ph. Grohs, Ruled Laguerre minimal surfaces, Math. Z 272 (2012), 645-674, DOI: 10.1007/s00209-011-0953-0 *	1432-1823	0.819 http://www.bioxbio.com/if/html/MATH-Z.html	ИППИ РАН, Университет науки и техники короля Абдулы, ETH Цюриха
4.	M. Cencelj, D. Repovs and M. Skopenkov, Classification of knotted tori in the 2-metastable dimension, Sbornik Math. 203:11 (2012), 129-158.	0368-8666	0.773 Интернет-сайт журнала	ИППИ РАН, Университет науки и техники короля Абдулы, Университет Любляны
5.	D. Crowley, S. Ferry, M. Skopenkov, The rational classification of links in codimension >2, Forum Math., DOI: 10.1515/form.2011.158 *	1435-5337	0.830 Интернет-сайт журнала	ИППИ РАН, Университет науки и техники короля Абдулы, Институт математики Хаудорфа, Университет Рутгерса

[1] Указываются авторы статьи, название статьи, том, номер, страницы и название журнала. В списке не указываются тезисы конференций.

[2] Указать импакт-фактор журнала и источник информации. Для журналов без импакт-фактора следует указывать 0.

[3] Перечислить организации, указанные в статье, как место работы авторского коллектива (приводятся данные всех соавторов).

* В данных работах нет ссылки на поддержку фонда «Династия», так как они были уже опубликованы онлайн до объявления результатов конкурса.

6.	F. Nilov, M. Skopenkov, A surface containing a line and a circle through each point is a quadric, Geom. Dedicata (2012), DOI: 10.1007/s10711-012-9750-0	0046-5755	0.364 Интернет-сайт журнала	ИППИ РАН, Университет науки и техники короля Абдулы, МГУ имени М.В. Ломоносова
7.	М. Скопенков, В. Смыкалов, А. Устинов, Случайные блуждания и электрические цепи, Математические просвещение, 3-я серия, 16 (2012), 25-47, http://www.mccme.ru/free-books/matprosh.html	-	0	ИППИ РАН, СпбГУ, ХО ИПМ ДВО РАН
8.	M. Skopenkov, When the set of embeddings is finite?, submitted.		0	ИППИ РАН, Университет науки и техники короля Абдулы
9.	A. Bobenko, M. Skopenkov, Discrete Riemann surfaces: linear discretization and its convergence, submitted.		0	ИППИ РАН, Университет науки и техники короля Абдулы, Технический университет Берлина

3 Участие в конференциях и школах

№ п/п	Вид и наименование мероприятия	Место проведения мероприятия	Дата начала	Дата окончания	Тема доклада
1	International topological conference 'Alexandroff readings'	Москва	21.05.2012	25.05.2012	When the set of links is finite?
2	Algebra and geometry. International Conference dedicated to the 65 - th anniversary of Askold G. Khovanskii	Москва	04.06.2012	09.06.2012	Surfaces containing several circles through each point
3	St. Petersburg School in Probability and Statistical Physics	Санкт - Петербург	18.06.2012	29.06.2012	-

№ п/п	Вид и наименование мероприятия	Место проведения мероприятия	Дата начала	Дата окончания	Тема доклада
1	Oberwolfach workshop 'Discrete differential geometry'	Обервольфах (Германия)	08.07.2012	14.07.2012	Discrete analytic functions: convergence results

4 Работа в научных центрах и международных группах

- Совместные публикации с учеными из Университета науки и техники короля Абдулы и Технического университета Берлина (статьи 2,3,9)

- Научные визиты в Университет науки и техники короля Абдулы (февраль 2012) и Технический университет Берлина (март 2012).

- Член оргкомитета конференции «Geometry and Topology. International Conference dedicated to the 75-th birthday of Alexei B. Sossinsky. October 8-9,2012, Independent University of Moscow (Moscow, Russia)»

5 Педагогическая деятельность

- 2007-н.в. Координатор и преподаватель системы дистанционного обучения математике МИОО http://math.olymp.mioo.ru для школьников-победителей олимпиад
- Осень 2012: Дистанционный спецкурс по математике Высшей школы экономики http://lms.hse.ru для одаренных школьников
- Осень 2012: Спецкурс «Разрезания прямоугольника, случайные блуждания и электрические цепи» в Независимом Московском Университете
- Август 2012: Проект «Ткани из прямых и окружностей» на Летней конференции Международного математического Турнира городов
- 2012 Неформальный научный руководитель 2 студентов (руководство в форме написания совместных научных работ – см. позиции 6,7 в списке публикаций выше).

Скопенков М.Б.