Отчет А.Е. Миронова за 2012 год

1. Полученные результаты.

Найдены необходимые условия для самосопряженности оператора четвертого порядка, входящего в коммутативное кольцо обыкновенных дифференциальных операторов ранга 2. В случае коммутирующих пар операторов L_4 и L_{4g+2} порядков 4 и $4g+2$ получены уравнения, эквивалентные уравнениям Кричевера на параметры Тюрина. С помощью этих уравнений построены примеры операторов ранга два, отвечающих спектральным кривым произвольного рода.

Исследованы эволюционные уравнения, связанные с самосопряженными операторами ранга два (совместно с В.Н. Давлетшиной).

Исследованы гладкие периодические решения уравнения нелинейной упругости (совместно с М. Бялым).

1.1 Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы.

Если два обыкновенных дифференциальных оператора

$$L_1 = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_2 = \partial_x^m + \sum_{i=0}^{m-1} v_i(x)\partial_x^i,$$

коммутируют, то по лемме Бурхналла– Чаунди существует ненулевой полином $R(z,w)$, такой, что $R(L_1,L_2)=0$. Рассмотрим совместную собственную функцию ψ коммутирующих операторов L_1 и L_2 :

$$L_1\psi = z\psi, \; L_2\psi = w\psi.$$

Собственные числа z и w удовлетворяют алгебраическому уравнению $R(z,w)=0$. *Спектральной кривой* называется алгебраическая кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$, заданная уравнением $R(z,w)=0$. Спектральная кривая параметризует совместные собственные числа операторов L_1 и L_2. *Рангом* l пары L_1 и L_2 называется размерность пространства совместных собственных функций при фиксированных z и w (это число одно и то же для всех точек $P=(z,w)\in\Gamma$ за исключением быть может конечного числа).

В случае ранга 1 все коммутирующие операторы найдены И.М. Кричевером. В случае операторов ранга $l>1$ известно, что совместная собственная функция отвечает спектральным данным Кричевера, но найти ее в явном виде не удается. Это является основной трудностью при нахождении операторов высокого ранга. Операторы ранга два, отвечающие эллиптической спектральной кривой найдены И.М. Кричевером и С.П. Новиковым. Операторы ранга три, также отвечающие эллиптической спектральной кривой найдены О.И. Моховым.

Перейдем к формулировке наших результатов. Мы будем предполагать, что спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \ldots + c_0, \tag{1}$$

коммутирующие операторы ранга два L_4, L_{4g+2} удовлетворяют уравнению

$$(L_{4g+2})^2 = F_g(L_4).$$

Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma,\ \ \sigma(z,w) = (z,-w).$$

На Γ существуют рациональные функции $\chi_0(x,P)$, $\chi_1(x,P), P \in \Gamma$ такие, что

$$\psi'' = \chi_0\psi + \chi_1\psi'.$$

Ранее нами было показано, что если функция χ_1 инвариантна относительно инволюции σ, то оператор L_4 самосопряжен, т.е. имеет вид

$$L_4 = L_4^* = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x).$$

Мы показали, что обратное утверждение также верно.

Теорема 1 *Оператор L самосопряжен тогда и только тогда, когда*

$$\chi_1(x,P) = \chi_1(x,\sigma(P)). \tag{2}$$

Предположим, что оператор L_4 самосопряжен, тогда функции χ_0, χ_1 имеют простые полюса в некоторых точках

$$\left(\gamma_i(x), \pm\sqrt{F_g(\gamma_i(x))}\right) \in \Gamma,\ \ 1 \le i \le g.$$

В следующей теореме мы указываем функции $\chi_0(x,P), \chi_1(x,P)$ и вводим уравнение на V, W, γ_i и $F_g(z)$.

Теорема 2 *Если оператор L_4 самосопряжен, то*

$$\chi_0 = -\frac{1}{2}\frac{Q''}{Q} + \frac{w}{Q} - V, \qquad \chi_1 = \frac{Q'}{Q},$$

где

$$Q = (z - \gamma_1(x)) \dots (z - \gamma_g(x)).$$

Функция Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(z) = 4(z-W)Q^2 - 4V(Q')^2 + (Q'')^2 - 2Q'Q^{(3)}$$
$$+2Q(2V'Q' + 4VQ'' + Q^{(4)}), \tag{3}$$

где под $Q', Q'', Q^{(k)}$ понимается $\partial_x Q, \partial_x^2 Q, \partial_x^k Q$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1 *Функция Q удовлетворяет линейному уравнению*

$$\mathcal{L}_5 Q = \left(\partial_x^5 + 2\langle V, \partial_x^3\rangle + 2\langle z - W - V'', \partial_x\rangle\right) Q = 0, \tag{4}$$

где $\langle A, B\rangle = AB + BA$.

Теорема 2 и следствие 1 являются обобщениями соответствующих утверждений для конечнозонных операторов Шредингера.

Чтобы найти самосопряженные операторы L_4, L_{4g+2} достаточно решить уравнение (3). Нами найдены частные решения уравнения этого уравнения для произвольного g. Эти решения приводят к следующим явным примерам операторов ранга два.

Теорема 3 *Оператор*

$$L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_1 \cos x + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_1 \cos x, \qquad \alpha_1 \neq 0$$

коммутирует с дифференциальным оператором L_{4g+2} порядка $4g+2$.

Теорема 4 (Давлетшина, М.) *Оператор*

$$L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_1 e^x, \qquad \alpha_1 \neq 0$$

коммутирует с дифференциальным оператором L_{4g+2} порядка $4g+2$.

Теорема 5 *Оператор*

$$L_4 = (\partial_x^2 + a_1\wp(x) + a_0)^2 + s_1\wp(x) + s_2\wp^2(x),$$

где

$$a_1 = \frac{1}{4} - 2g^2 - 2g, s_1 = \frac{1}{4}g(g+1)(16a_0 + 5g_2), s_2 = -4g(g+2)(g^2-1),$$

коммутирует с оператором L_{4g+2} *порядка* $4g+2$.

2.1 Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы и эволюционные уравнения (результаты получены совместно с В.Н. Давлетшиной).

И.М. Кричевером и С.П. Новиковым введен важный класс точных решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) — решений ранга l. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили

$$\frac{3}{4}U_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(U_t + \frac{3}{2}UU_x - \frac{1}{4}U_{xxx})$$

допускает представление Захарова–Шабата

$$[\partial_t - A, \partial_y - L] = 0,$$

где $L = \partial_x^2 + U(x,y,t)$, $A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}U(x,y,t)\partial_x + P(x,y,t)$. Решения ранга l выделяются дополнительным условием, при котором операторы

$$\partial_t - A, \quad \partial_y - L$$

коммутируют с элементами коммутативного кольца $\mathcal{A}$ обыкновенных дифференциальных операторов ранга l

$$[L_n, \partial_t - A] = 0, \quad [L_n, \partial_y - L] = 0,$$

где $L_n \in \mathcal{A}$. Коэффициенты L_n— функции, зависящие от y и t.

Мы рассматриваем аналог точных решений, введенных Кричевером и Новиковым, а именно мы изучаем решения ранга 2 эволюционных уравнений на функции $V(x,t_n), W(x,t_n)$, эквивалентные условию коммутации дифференциальных операторов

$$[L_4, \partial_{t_n} - A_n] = 0, \tag{5}$$

где L_4 самосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка

$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x,t_n))^2 + W(x,t_n),$$

A_n — кососимметричный оператор порядка $2n+1$. При этом мы предполагаем, что при каждом t_n оператор L_4 входит в комутативное кольцо дифференциальных операторов ранга 2.

При $n=1$ уравнения на V и W имеют вид:

$$V_{t_1} = \frac{1}{4}(6VV_x + 6W_x + V_{xxx}), \quad W_{t_1} = \frac{1}{2}(-3VW_x - W_{xxx}). \tag{6}$$

Эта система является обобщением уравнения Кортевега – де Фриза (КдФ). Если $W=0$, то V удовлетворяет КдФ.

Решение ранга один уравнения (6) были найдены Дринфельдом и Соколовым.

Пусть $\psi = (\psi_0(x,t_1,P), \psi_1(x,t_1,P))$— совместная функция операторов L_4, L_{4g+2}, $\partial_{t_1} - A_3$,

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi, \quad (\partial_{t_1} - A_3)\psi = 0,$$

Точка $P = P(z,w)$ принадлежит спектральной кривой, заданной уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \ldots + c_0.$$

Обозначим через Φ матрицу Вронского

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_0 & \psi_1 \\ (\psi_0)_x & (\psi_1)_x \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(\partial_x - \chi)\Phi = 0, \quad (\partial_{t_1} - \Sigma)\Phi = 0,$$

где

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_0 & \chi_1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Функции χ_s, Σ_{ij} удовлетворяют уравнениям Кричевера–Новикова. Эти уравнения задают деформацию параметров Тюрина полустабильных расслоений над Γ. Напомним, что по теореме 1 самосопряженность оператора L_4 эквивалентна условию

$$\chi_1(x,t,P) = \chi_1(x,t,\sigma(P)).$$

Компоненты матрицы χ были найдены в теореме 2.

Теорема 6 *Имеют место равенства*

$$\Sigma_{11} = \frac{Q(V_x) + 2(2VQ_x + Q_{xxx})}{4Q}, \ \Sigma_{12} = \frac{-2QV - 4w(z) - 2Q_{xx}}{4Q},$$

$$\Sigma_{21} = \frac{V(2w - Q_{xx}) - Q(4z - 2V^2 - 4W - V_{xx})}{4Q}, \ \Sigma_{22} = \frac{2QVQ_x - Q^2V_x}{4Q^2}.$$

Функция Q удовлетворяет уравнению

$$Q_{t_1} = \frac{1}{2}\left(-3VQ_x - Q_{xxx}\right). \tag{7}$$

Отметим, что уравнение (7) задает симметрию уравнения (3). Аналогично уравнению (7) можно получить эволюционные уравнения на Q, отвечающие (5) при $n > 1$. Эти уравнения также задают симметрии уравнения (3). В случае эллиптической спектральной кривой уравнение (7) и его аналоги при $n > 1$ эквивалентны уравнениям иерархии Кричевера–Новикова. В случае гиперэллиптических спектральных кривых рода $g > 1$ эти уравнения являются обобщениями уравнений иерархии Кричевера–Новикова.

3.1 Периодические решения уравнения нелинейной упругости (результаты получены совместно с М. Бялым).

Мы изучаем гладкие периодические решения уравнения

$$u_{tt} + (\sigma(u))_{xx} = 0, \tag{8}$$

где σ — некоторая функция, $u(t,x)$ периодична по x

$$u(t, x+1) = u(t,x).$$

Мы предполагаем, что u является C^2-гладкой на цилиндре или на полуцилиндре. Уравнение (8) является условием совместности для квазилинейной 2×2-системы уравнений

$$\begin{cases} u_t = -v_x \\ v_t = (\sigma(u))_x. \end{cases} \tag{9}$$

Легко увидеть, что из периодичности u следует

$$v(t, x+1) = v(t,x) + C,$$

C — константа. Следовательно, v является суммой линейной функции и периодической функции по x.

Система (9) и уравнение (8) появляется во многих приложениях. Отметим, что наше условие на σ будет такое, что задача становится смешанного эллиптико–гиперболического типа. Поэтому необходим анализ как эллиптических, гиперболических областей, так и границ между ними. Наша цель показать, что не существует непостоянных гладких периодических решений этих уравнений.

Отметим, что система (9) появляется также в классической механике. А именно, условие существования полиномиального по импульсам интеграла третьей степени для гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}p^2 + u(t,x)$ эквивалентно системе (9) при $\sigma(u) = \frac{u^2}{2}$. Ранее В.В. Козлов показал, что в этом случае система не может иметь периодических решений в виде тригонометрических полиномов.

Уравнения (8) и (9) появляются также в нелинейной упругости. При этом σ имеет вид кубической функции (тип II см. ниже).

Мы рассматриваем два типа σ:

I. Функция σ является выпуклой и имеет минимум (см. Рис. 1).

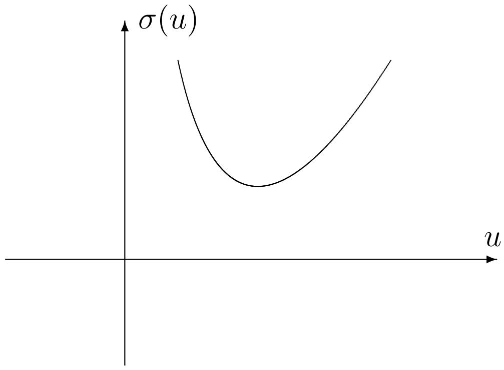

Рис. 1

II.
Функция σ выглядит как кубический полином по u (см. Рис. 2), т.е.
$\sigma'(u) < 0$ при $u < \alpha$ и $u > \beta$,
$\sigma'(u) > 0$ при $u \in (\alpha, \beta)$,
$\sigma''(u) > 0$ при $u \leq \alpha$ и $\sigma'' < 0$ при $u \geq \beta$.

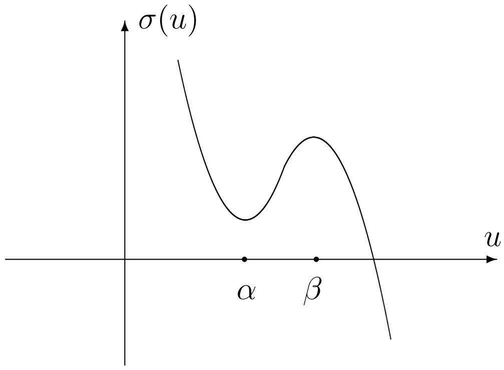

Рис. 2

Теорема 7 *Пусть $\sigma(u)$ имеет тип I или II. Тогда любое C^2-решение (9), определенное на полуцилиндре $[t_0, +\infty) \times \mathbf{S}^1$:*

$$u(t, x+1) = u(t, x),\ v(t, x+1) = v(t, x), t \geq t_0,$$

с начальными условиями в гиперболической области, является постоянным.

Теорема 8 *Если $\sigma(u)$ имеет тип I или II, то любое C^2-решение (u, v) системы (9), определенное на всем цилиндре $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^1$ такое, что,*

$$u(t, x+1) = u(t, x),\ v(t, x+1) = v(t, x)$$

является постоянным.

Теорема 9 *Если $\sigma = \frac{u^2}{2}$, то любое C^2-решение $(u(t, x), v(t, x))$ системы (9) с двояко периодическим u*

$$u(t+1, x) = u(t, x+1) = u(t, x)$$

является постоянным.

Теорема 10 *Пусть* $(u(t,x), v(t,x))$ *является* C^2*-решением (9), где* $\sigma(u)$ *имеет тип I или II, тогда, если* $u(t,x)$ *ограниченная и периодическая функция*

$$u(t, x+1) = u(t,x)$$

то (u, v) *постоянны.*

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. M. Bialy, A. Mironov. New semi-Hamiltonian hierarchy related to integrable magnetic flows on surfaces. Cent. Eur. J. Math. 2012. Vol. 10, No. 5, 1596–1604.

2. А.Б. Жеглов, А.Е. Миронов. Модули Бейкера-Ахиезера, пучки Кричевера и коммутативные кольца дифференциальных операторов в частных производных. Дальневосточный математический журнал. 2012. Vol. 12. No. 1. C. 20–34.

3. M. Bialy, A. Mironov. From polynomial integrals of Hamiltonian flows to a model of non-linear elasticity. arXiv:1212.0934

4. A.E. Mironov. Commuting higher rank ordinary differential operators. arXiv:1204.2092.

5. A.E. Mironov. Self-adjoint commuting ordinary differential operators.

3. Участие в конференциях и школах

1. 6th European Congress of Mathematics, Krakow, July 2-7, 2012 (приглашенный секционный доклад).

2. International workshop "Geometric Structures in Integrable Systems Moscow, October 30 - November 2, 2012.

3. Workshop "Integrability - modern variations Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn, January 09 - January 13, 2012.

4. Workshop "Integrability in topological field theory Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn, April 16 - April 20, 2012.

5. Летняя школа по геометрии и матфизике 2012, организованная лабораторией геометрических методов математической физики им. Н.Н. Боголюбова МГУ. Лекции для студентов.

4. Работа в научных центрах и международных группах

1. Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn.

2. Tel-Aviv University.

3. Tsuda College, Tokyo.

5. Педагогическая деятельность

Спецкурс "Римановы поверхности"(совместно с Б.А. Дубровиным). Лаборатория геометрических методов математической физики им. Н.Н. Боголюбова МГУ.

Спецсеминар "Интегрируемые системы". Лаборатория геометрических методов математической физики им. Н.Н. Боголюбова МГУ.

Научное руководство.

Магистранты: С. Агапов, Г. Маулешева.

Аспиранты: В. Давлетшина, Б. Сапарбаева.