

Научный отчет Устиновского Юрия за 2014 год. Итоги работы за 3 года.

1 Научные результаты

В 2014 году мною было продолжено изучение геометрических свойств компактных комплексных многообразий, допускающих действие тора $T^m = (S^1)^m$. Полученные результаты можно условно разделить на две группы

1. Результаты об аналитических подмножествах компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора.
2. Результаты о когомологиях Дольбо компактных комплексных многообразий со свободным действием голоморфного тора $\mathcal{T} := \mathbb{C}^l/\Lambda$.

1. Хорошо известно, что нормальные алгебраические многообразия, допускающие действие алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^m$ допускают эффективное описание в терминах комбинаторики примыкания $(\mathbb{C}^*)^m$ -орбит. В 2013 году, Исидой (“Complex manifolds with maximal torus actions”, arXiv:1302.0633) было введено понятие *максимального действия* тора $T = (S^1)^m$, приведена конструкция, позволяющая построить множество таких многообразий и доказано, что любое компактное комплексное многообразие с максимальным действием тора может быть получено при помощи указанной конструкции. Эти результаты можно рассматривать как комплексно-аналитическое обобщение теории торических многообразий. В работе [У1] было доказано, что серия многообразий, описанная в нашей совместной работе с Т.Пановым (“Complex-analytic structures on moment-angle manifolds”, Mosc. Math. J., 12:1 (2012), 149–172), совпадает с семейством многообразий, предложенным Исидой. При этом, оказывается, что наш подход по существу является аналогом конструкции Кокса-Батырева торических многообразий.

Несмотря на явную конструкцию комплексных многообразий с максимальным действием тора, об их геометрии было известно очень мало. Почти все из них некалеровы, поэтому большая часть методов комплексной геометрии к ним не применима. В [У1], также, было определено каноническое голоморфное слоение \mathcal{F} на изучаемых многообразиях и, при некоторых ограничениях на комбинаторные данные, их задающие, была построена форма $\omega_{\mathcal{F}}$ трансверсально-калерова относительно слоения \mathcal{F} . Тем самым, были получены обобщения результатов нашей работы в соавторстве с М.Вербицким и Т.Пановым (“Complex geometry of moment-angle manifolds”, arXiv:1308.2818) о геометрии момент-угол-многообразий. В качестве приложения (при дополнительных технических ограничениях) получено полное описание мероморфных функций и аналитических подмножеств общих эквивариантных деформаций изучаемых многообразий.

2. Мной был сформулирован комплексно-аналитический вариант гипотезы о торическом ранге для компактных комплексных многообразий с почти свободным голоморфным действием комплексного тора. Эта гипотеза дает оценку на суммы некоторых чисел Ходжа многообразия. Нами получены две конструкции, позволяющие вычислять кольцо рациональных когомологий (соответственно кольцо когомологий Дольбо) пространства (комплексного многообразия) с непрерывным (голоморфным) действием тора. Данные конструкции, с одной стороны, мотивируют приведенную формулировку гипотезы, а с другой стороны, позволяют перенести некоторые результаты, полученные в работе “О почти свободных действиях тора и гипотезе Хоррокса” (Дальневост. матем. Журн., 12:1 (2012), 98–107) на комплексно-аналитический случай. В частности, удастся доказать комплексно-аналитическую гипотезу о торическом ранге для комплексных многообразий с односвязным кэлеровым пространством орбит в том случае, когда ранг тора не превосходит 10. Результаты частично опубликованы в работе [У2].

2 Опубликованные и поданные в печать работы

[У1] Ю. М. Устиновский, “Геометрия компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора”, Тр. МИАН, 286, МАИК, М., 2014, 219–230

[У2] Ю. М. Устиновский, “О моделях колец когомологий пространств с действием тора”, УМН, 69:4(418) (2014), 187–188

[У3] Ю. М. Устиновский, “Топология и геометрия комплексных многообразий с максимальным действием тора,” кандидатская диссертация (2014), http://www.mi.ras.ru/dis/ref14/ustinovskii/ustinovskii_dis.pdf.

3 Выступления на научных семинарах

1. *Группы Ли и теория инвариантов*, МГУ, 5 марта 2014, руководитель Иван Аржанцев.

4 Педагогическая деятельность

Являюсь сотрудником кафедры Дискретной математики ФИВТ МФТИ. В весеннем семестре вёл семинарские занятия “Классическая механика” для студентов 3-го курса. В первом полугодии работал в 57-ой школе: вел математический анализ в 10-ом классе, участвовал в организации и проведении летнего лагеря для школьников.

5 Итоги работы за 3 года

Предложенный нами в 2011 году план исследований включал в себя работу по следующим направлениям:

1. *Построение гладких структур на момент-угол-комплексах. Изучение кольца симплициальных сфер \mathcal{S} . Получение эффективных методов вычисления характеристических чисел квазиторических и торических многообразий.*

Результатом этого исследования явилось получение новых формул для вычисления характеристических чисел и родов Хирцебруха торических и квазиторических многообразий. В первоначальном плане ожидалось, что эти формулы будут следствием существования гладких структур на широком классе момент-угол-комплексов. В итоге эти формулы удалось вывести, основываясь на конструкции класса гомоморфизмов из кольца симплициальных комплексов K , обобщающего классические многочлены объема. Эти гомоморфизмы удалось определить исключительно комбинаторным образом без предположения наличия гладкой структуры на Cone K .

2. *Изучение комплексной геометрии момент-угол-многообразий \mathcal{Z}_K .*

В рамках этого направления получены новые результаты о геометрии момент-угол-многообразий и их естественного обобщения — компактных комплексных многообразий с максимальным действием тора. Результаты этого раздела опубликованы в работах в журналах Moscow Mathematical Journal (2012), Труды МИАН (2014), поданы к публикации в Geometry and Topology (2013).

3. *Анализ модели когомологий Дольбо момент-угол-многообразий и ее связи с кольцом Стенли-Райснера.*

По этому направлению получены общие модели для колец рациональных когомологий топологических пространств с действием тора и колец Дольбо комплексных многообразий с действием голоморфного тора. В качестве приложения этих моделей установлена связь гипотезы о торическом ранге с гипотезой Хоррокса. Результаты опубликованы в “Дальневосточном математическом журнале” (2012) и в журнале “Успехи математических наук” (2014).

Результаты пунктов 2 и 3 проведенных исследований легли в основу кандидатской диссертации [УЗ], защищенной мной в этом году в МИАН им. В.А.Стеклова.