ОТЧЕТ ПО ГРАНТУ ФОНДА “ДИНАСТИЯ” ЗА 2012 ГОД. УСТИНОВСКИЙ ЮРИЙ

1. Результаты, полученные в этом году.

Исследования, проведенные автором в 2012 году можно условно разделить на три направления:

(1) Изучение взаимосвязи между гипотезой Гальперина о торическом ранге и гипотезой Бухсбаума-Айзенбада-Хоррокса о рангах некоторых Tor-модулей;
(2) Формулы локализации в торической топологии;
(3) Комплексная геометрия момент-угол-многообразий.

1. Гипотеза Гальперина о торическом ранге и гипотеза Бухсбаума-Айзенбада-Хоррокса являются одними из классических открытых задач в эквивариантной топологии и коммутативной алгебра соответственно. Гипотеза о торическом ранге дает нижнюю оценку на ранг кольца когомологий конечномерного топологического пространства X с почти свободным действием тора $T = (S^1)^m$, а именно, она утверждает, что $\dim_{\mathbb{Q}} H^*(X, \mathbb{Q}) \geqslant 2^m$. Гипотеза о Бухсбаума-Айзенбада-Хоррокса (в одном из вариантов) дает нижнюю оценку на ранг некоторых Tor-модулей над кольцом многочленов $A = S_{\mathbb{Q}}(v_1, \ldots, v_m)$: пусть M — конечномерный над $\mathbb{Q}$ модуль над кольцом A, тогда $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_A(M, \mathbb{Q}) \geqslant 2^m$. Сами формулировки подсказывают, что между этими гипотезами должна быть тесная связь, однако вывести одну из гипотез из другой не удавалось. В статье [У] автором доказано, что если конструкция Бореля $X_T = X \times_T ET$ пространства X формальна (то есть минимальная модель $[\mathcal{M}^*(X_T), d]$ алгебры коцепей пространства X_T квази-изоморфна алгебре $[H^*(X_T, \mathbb{Q}), 0]$) то из гипотезы Бухсбаума-Айзенбада-Хоррокса для $S_{\mathbb{Q}}(v_1, \ldots, v_m) = H^*_T(pt, \mathbb{Q})$-модуля $H^*_T(X, \mathbb{Q})$ следует гипотеза о торическом ранге для X. Это утверждение позволило проинтерпретировать некоторые частные результаты касательно гипотезы Бухсбаума-Айзенбада-Хоррокса в терминах неравенств на биградуированные числа Бетти момент-угол-комплексов Z_K.

2. Теорема Пахнера утверждает, что любая симплициальная PL-сфера K^n может быть получена из границы стандартного симплекса $\partial\Delta^{n+1}$ последовательностью специальных операций —движений Пахнера. Понятия движений Пахнера обобщаются на полные регулярные симплициальные вееры — объекты, задающие компактные неособые торические и квазиторические многообразия. Естественно спросить, всякий ли веер Σ можно получить из стандартного веера, задающего $\mathbb{C}P^n$ последовательностью движений Пахнера, оставаясь при этом в классе неособых вееров? Автору удалось доказать, что если это возможно, то класс кобордизма торического многообразия X_Σ полностью определятся комбинаторикой веера Σ. При этом нетрудно построить два комбинатрно эквивалентных веера Σ_1, Σ_2 таких, что $[X_{\Sigma_1}] \neq [X_{\Sigma_2}]$.

Основным инструментом при доказательстве являлись различные формулы локализации. Формула локализации Атьи-Бота позволяет вычислять интеграл от эквивариантной дифференциальной формы α по многообразию M с действием тора T в терминах интеграла по T-неподвижному множеству F от формы $\alpha|_F / e_T(\nu_F)$. Эта формула будучи примененной к классам Чженя стабильного касательного расслоения, даёт эффективный метод для вычисления класса кобордизма многообразия M.

В качестве другого примера применения формул локализации, получено альтернативное доказательство формулы для объема выпуклого простого многогранника P, являющейся полиномом от его опорных чисел.

3. Момент-угол-комплексы Z_K, впервые определенные Дэвисом и Янушкевичем, образуют важный класс пространств с действием тора T^m. В совместно работе Панова и Устиновского на этих пространствах при дополнительных ограничениях на симплициальный комплекс K были введены гладкие и комплексные T^m-эквивариантные структуры. В той же работе при некоторых условиях рациональности (при помощи расслоения $Z_K \to X_\Sigma$ над торическим многообразиям) была описана алгебра когомологий Дольбо $H_{\bar\partial}^{*,*}(Z_K)$. В исследовании, проводимом автором совместно с Вербицким и Пановым удалось продвинуться в понимании комплексной геометрии многообразий Z_K. А именно, для симплициальных комплексов K, происходящих из выпуклых многогранников, на Z_K было построено регулярное трансверсально Кэлерово слоение $(\mathcal{F}, \omega_{\mathcal{F}})$, которое в рациональном случае состоит из слоев проекции $Z_K \to X_\Sigma$. Это слоение позволяет эффективно изучать комплексные подмногообразия и аналитические подмножества в Z_K. В частности, доказано, что всякое Кэлерово подмногообразие в Z_K является компактным тором, и, что при некоторых условиях общности в Z_K имеется лишь конечное число дивизоров и кривых. Как следствие, на общих многообразиях Z_K нет непостоянных мероморфных функций. Ожидается, что удастся полностью описать модмногообразия всех размерностей в Z_K. В дальнейшем планируется вычислить базисные когомологии слоения $\mathcal{F}$ и применить их для нахождения когомологий Дольбо Z_K в общем случае (без условия рациональности).

2. Опубликованные и поданные в печать работы.

[У] Ю. М. Устиновский, "О почти свободных действиях тора и гипотезе Хоррокса", Дальневост. матем. журн., 12:1 (2012), 98–107, `arXiv:1203.3685`

3. Участие в конференциях и школах.

1. 21-25 мая. Александровские чтения, Москва. Выступление с докладом "Гипотеза о торическом ранге и гипотеза Хоррокса".
2. 16-19 ноября. Toric topology meeting, Osaka. Talk "Complex geometry of moment-angle-manifolds".
3. 23-25 ноября. Tranformation groups, Tokyo.

4. Работа в научных центрах и международных группах.

Старший лаборант Лаборатории "Дискретной и вычислительной геометрии"

5. Педагогическая деятельность.

Сотрудник кафедры Дискретной математики ФИВТ МФТИ. В весеннем семестре вёл семинарские занятия "Топология" для студентов 2-го курса. В осеннем семестре вёл семинарские занятия "Дифференциальная геометрия" для студентов 3-го курса.

Продолжаю работать в 57-ой школе: веду математический анализ в 9-ом классе, в первом полугодии вел кружок по математике для 10-ого класса, участвовал в организации и проведении летнего лагеря для школьников (с 28 июня по 7 июля).