Оценки кратности и значений собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях

Михаил Карпухин

Проект посвящен спектральной геометрии или, более точно, оценкам на кратности и значения собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами. Спектр оператора Лапласа-Бельтрами — важный инвариант риманова многообразия, топологические и метрические свойства которого и планируется изучать в данном проекте. Исследование будет проводится в трех направлениях.

Изучение функционалов $\Lambda_i(\mathbb{T}^2, g)$. Пусть (M, g) — замкнутое риманово многообразие размерности 2. Нормализованное собственное значение оператора Лапласа-Бельтрами $\Lambda_i(M, g) = \lambda_i(M, g)\,\mathrm{Area}(M)$ может рассматриваться как функционал на пространстве метрик на M. Кореваар доказал существование верхней оценки для этих функционалов, зависящей только от топологии M. Тем не менее, задача нахождения максимальных метрик решена для очень ограниченного числа многообразий и номеров i. В попытках решить эту задачу было введено понятие экстремальной метрики, которое оказалось тесно связанным с минимально погруженными подмногообразиями в евклидовых единичных сферах $\mathbb{S}^n$. Эль Суфи и Илиас доказали, что метрика g, индуцированная таким погружением является экстремальной для функционала $\Lambda_{N(2)}(M, g)$, где $N(\lambda) = \#\{\lambda_i(M, g) < \lambda\}$. Эта связь использовалась Ляпуантом, Пенским и автором проекта для построения явных примеров экстремальных метик на торах и бутылках Клейна. В ближайшее время планируется доказать, что все построенные таким образом экстремальные метрики не являются максимальными. Дальнейшие исследования будут вестись в направлении решения следующих задач.

1) Построение метрики, экстремальной для функционала $\Lambda_2(\mathbb{T}^2, g)$. Это единственный функционал на торе, для которого не известно ни одной экстремальной метрики.

2) Построение максимальных метрик для функционала $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$, ограниченного на конформный класс $[g]$. Особый интерес представляют классы, в которых максимальная метрика не является плоской.

3) Хсянг и Лоусон классифицировали все минимальные подмногообразия кооднородности 1 в $\mathbb{S}^3$. В частности, два из четырех известных семейств экстремальных метрик являются минимальными подмногообразиями кооднородности 1 в $\mathbb{S}^3$. Планируется изучить спектральные свойства оставшихся подмногообразий в классификации Хсянга-Лоусона.

Задача Стеклова на поверхностях. Задача Стеклова является одним из вариантов постановки спектральной задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях с границей. В недавней работе автору проекта совместно с Кокаревым и И. Полтеровичем удалось получить верхние оценки на кратности соответсвующих собственных чисел σ_i. В дальнейшем планируется продолжить изучение спектра Стеклова, в частности, получить ответ на следующий вопрос.

4) Существует ли последовательность римановых многообразий (M_n, g_n), такая что $\dim M_n = 2$ и нормализованные собственные числа Стеклова $\sigma_1(M_n, g_n)L(\partial M_n) \to \infty$ при $n \to \infty$? Здесь $L(\partial M)$ означает длину границы многообразия M. Положительный ответ на этот вопрос означает, что верхняя оценка на первое нормализованное собственное значение существенно зависит от топологии многообразия.

Кратности собственных значений оператора Лапласа на формах. Оператор Лапласа естественно продолжается на дифференциальные формы и в этом контексте имеются интересные нерешенные вопросы. Долгосрочным планом является получение ответов на следующие два вопроса.

5) Верно ли, что на любом многообразии M с $\dim M \geqslant 6$ и для любого N существует метрика, для которой кратность первого ненулевого собственного значения оператора Лапласа на $\Omega^1(M)$ больше N.

6) Пусть $\dim M = 3$. Верно ли, что существует оценка на кратности собственных чисел оператора Лапласа, ограниченного на $\Omega^1(M)$, зависящая только от топологии M?