

Комеч Сергей Александрович: краткое изложение заявки.

Геометрическая интерпретация энтропии в теории динамических систем

Понятие энтропии в теории динамических систем было введено в 1958 году А.Н. Колмогоровым в качестве нового метрического инварианта для сохраняющих меру преобразований вероятностных пространств и стало играть фундаментальную роль в эргодической теории. Главной целью наших исследований является изучение энтропии Колмогорова с геометрической точки зрения.

Рассматривается преобразование T пространства, сохраняющее меру. Пусть $B(x, \varepsilon)$ — шар радиуса ε с центром в точке x . Множество $T^n B(x, \varepsilon)$ имеет ту же меру, что и исходный шар. Изучается скорость роста логарифма отношения меры ε -окрестности образа шара за n итераций к мере исходного шара. Такую величину можно рассматривать как логарифмическую скорость деформации границы области в фазовом пространстве системы. Оказывается, что логарифм такого отношения (при определенной связи между n и ε) при $n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ растет как nh , где h — энтропия Колмогорова.

Недавно в работе автора такая связь была установлена в более широком классе символических динамических систем — в синхронизованных системах, которые содержат не только все марковские сдвиги, но и их факторы: получаемые из них с помощью побуквенного кодирования так называемые софические системы (sofic systems) Вейса. Также, в работе автора подобное соотношение было установлена для гладких гиперболических систем, а именно для автоморфизмов n -мерного тора (когда объем — инвариантная мера). Дальнейшие исследования предлагается вести в следующих направлениях:

1. Ослабить требование равномерной гиперболичности для гладких систем и установить связь энтропии с искажением границы в частично гиперболических системах, например для потоков Аносова, и, возможно, в некоторых неравномерно гиперболических системах.
2. Для гладких систем на римановых многообразиях рассмотреть искажение границы, основываясь не на инвариантной мере, а на не инвариантном, вообще говоря, римановом объеме (что вполне естественно). В такой трактовке искажение границ будет связано с показателями Ляпунова, которые, в свою очередь, имеют определенную связь с энтропией.
3. В символической динамике рассмотреть так называемые кодируемые системы (coded systems) и попробовать установить для них справедливость нашего предположения.
4. Найти примеры систем, в которых такая связь отсутствует.