Краткое изложение заявки.

Ф.Н. Пахомов.

Разрешимость теорий и эффективные системы ординальных обозначений.

Мы рассматриваем системы ординальных обозначений в более алгебраическом стиле, чем это иногда принято — как модели некоторой реурсивно-перечислимой сигнатуры, состоящей из константных и функциональных символов, а также бинарного предикатного символа $<$, такие, что интерпретация $<$ является вполне упорядочиванием, все элементы этой модели являются значениями некоторых термов и разрешима проблема $<$-сравнения значений замкнутых термов. Основной мотивацией моих исследований является, давно обнаруженая, проблема связанная с формализацией, возникающего на практике понятия "естественной" системы ординальных обозначений; данный план не предполагает разрешения этой проблемы, известной, как проблема каноничности систем ординальных обозначений, но некоторые результаты, которые планируется получить в рамках этого исследования, могут быть полезны в дальнейшем для её решения.

В работе [1] и моей дипломной работе "О разрешимости элементарных теорий алгебр доказуемости и их фрагментов." рассматривались системы ординальных обозначений, основанные, на полимодальной логике доказуемости **GLP**. Порядковые типы таких систем ординальных обозначений доходят до и включают ε_0 — большой счётный ординал, теоретико-доказательственный ординал **PA**. Эта логика и такого рода системы обозначений активно изучались в последнее десятилетие. В указанных в начале абзаца работах было установлено, что такого рода системы ординальных обозначений обладают разрешимой элементарной теорией(множество всех формул с кванторами, истинных в данной модели) для относительно маленьких ординалов и неразрешимой для больших, были установлены точные границы; в зависимости от некоторых деталей построения, верхней границей разрешимости является либо ординал ω^ω, либо ординал ω^{ω^ω}.

Ведётся работа над теоремой, контрастирующей с предыдущими результатами — планируется доказать разрешимость элементарной теории свободнопорождённой из констант **GLP**-алгебры; все структуры из предыдущих результатов вкладываются в эту алгебру.

Недавно (2009 г.) Л. Бро для всех $\alpha < \varepsilon_0$ была установлена разрешимость монадической теории (множества всех формул с кванторами по множествам элементов и индивидуальным элементам, истинных в данной модели) системы ординальных обозначений, построенной естественным образом из стандартной системы кофинальных последовательностей до α. Позднее тем же автором и А. Караёлем была получена верхняя грань ε_0(точная в силу предыдущего результата) для вполне упорядочиваний, лежащих в иерархии Кукаля — большом и активно изучаемом классе структур с разрешимой монадической теорией.

Планируется получить усиление предыдущего результата до точной верхней грани ε_0 на высоты фундированых бинарных отношений из этой иерархии.

Планируется провести анализ систем ординальных обозначений, содержащихся в иерархии Кукаля на предмет их адекватности для Π_2-ординального анализа и Π_1-ординального анализа; текущая гипотеза о неформальных свойствах этих систем ординальных обозначений состоит в их не-"паталогичности", что должно означать положительный ответ на предыдущие вопросы.

Кроме того планируется решить проблему разрешимости монадической теориии для системы ординальных обозначений до ε_0, аналогичную рассмотреным Л. Бро. Для положительного решения этого вопроса, предположительно, потребуется новый мощный метод доказательства разрешимости монадических теорий и при этом, в силу лежания у границы применимости известного метода, возможно конструкция нового(гипотетического) метода будет значительно яснее, чем это могло быть до приведённых выше результатов Бро и Караёля. Скорее всего, опять же при положительном решение проблемы, разработанную технику можно будет применять для аналогичных задач со значительно большими ординалами.

Список литературы

[1] Ф. Н. Пахомов. Неразрешимость элементарной теории полурешетки GLP-слов. *Матем. сб.*, 203:141–160, 2012.