КОМБИНАТОРИКА ФЛАГОВЫХ ПРОСТЫХ МНОГОГРАННИКОВ: КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ЗАЯВКИ

Важным комбинаторным инвариантом выпуклого многогранника является f-вектор, i-я компонента которого равна числу его i-мерных граней. В случае простых многогранников важную роль играют также g-,h- и γ-векторы, которые получаются из f-вектора применением соответствующих невырожденных линейных операторов. Фундаментальная задача описания условий на целочисленный вектор, необходимых и достаточных, чтобы он был f-вектором некоторого простого многогранника, была решена Р.Стэнли, Л.Биллерой и К. Ли.

Выпуклый многогранник называется *флаговым*, если любой набор его попарно пересекающихся граней имеет непустое пересечение, т.е. граница двойственного симплициального многогранника не имеет недостающих граней. С флаговыми простыми многогранниками связана известная гипотеза Черни-Дэвиса, которая формулируется в терминах h-векторов. Эта гипотеза подсказана CAT(0) неравенствами Громова. Плодотворное обобщение этой гипотезы нашел С. Гал: *компоненты γ-вектора простого флагового многогранника неотрицателены.* В работе С. Гала, где сформулирована эта гипотеза, она доказана для многогранников, размерность которых не превосходит пяти.

В рамках данного проекта рассматривается класс простых многогранников, *2-усеченные кубы*, т.е. многогранники, получающиеся из куба последовательностью срезок граней коразмерности 2. Этот класс появился в работах автора и соответствующая теория была развита в совместных работах с В.Бухштабером. Установлено, что 2-усеченные кубы обладают замечательными свойствами, в частности являются простыми флаговыми многогранниками, удовлетворяющими гипотезе Гала. Было показано, что многие важные классы простых многогранников (флаговые нестоэдры, граф-ассоциэдры, граф-кубиэдры) являются 2-усеченными кубам. Среди них хорошо известные серии ассоциэдров (многогранники Сташефа), циклоэдров (многогранники Ботта-Таубса) и пермутоэдров. Также были получены результаты о комбинаторике упомянутых подклассов 2-усеченных кубов. Приведены конструкции, позволяющие срезкой граней коразмерности 2 получить n-мерный граф-ассоциэдр из произведения $(n-1)$-мерного граф-ассоциэдра на отрезок. С помощью данных конструкций были получены дифференциальные и функциональные уравнения на производящие функции перечисляющих полиномов ассоциэдров, циклоэдров, пермутоэдров и стеллоэдров. Некоторые из этих уравнений были получны ранее В.Бухштабером с помощью алгебры простых многогранников. Были получены точные верхние и нижние границы для перечисляющих векторов граф-ассоциэдров, отвечающих связным графам, двусвязным графам и деревьям.

Е.Нево и Т.Петерсен выдвинули усиление гипотезы Гала: *γ-вектор простого флагового многогранника реализуется как f-вектор некоторого симплициального комплекса.* Эта гипотеза накладывает дополнительные условия на γ-векторы простых флаговых многогранников, вытекающие из известных неравенств Крускала-Катона для f-векторов симплициальных комплексов. Е.Нево и Т.Петерсен построили такие комплексы для некоторых серий многогранников, в частности для многогранников Сташефа и многогранников Ботта-Таубса. Н.Айсбетт построила требуемые комплексы для флаговых нестоэдров. Ее конструкция опирается на специфику производящих множеств и использует результат автора о том, что каждый флаговый нестоэдр является 2-усеченным кубом. Недавно автором требуемые комплексы были построены для всех комбинаторных 2-усеченных кубов.

Хорошо известно, что решетка граней куба является булевой алгеброй. Известно также, что множество вершин ассоциэдров (т.е. бинарные деревья на плоскости) и множество вершин пермутоэдров (т.е. перестановки конечных множеств) порождают алгебры Хопфа. Планируется исследовать возможность введения алгебраических структур, связанных с другими сериями 2-усеченных кубов.

Планируется исследовать топологию момент-угол комплексов и торических многообразий, соответствующих комбинаторным 2-усеченным кубам. В частности, планируется связать последовательность 2-усечений с операцией произведения Масси в кольце когомологий.

Срезка грани коразмерности 2 простого многогранника двойственна реберному подразделению границы симплициального многогранника. Операция реберного подразделения у симплициального комплекса является в определенном смысле правой обратной операцией к стягиванию ребра. Симплициальные многогранники, двойственные 2-усеченным кубам (реберные подразделения кросс-политопов), могут быть приведены к кросс-политопу стягиваниями ребер. Однако, уже в размерности 3 существует пример (икосаэдр) флагового симплициального многогранника, не являющегося реберным подразделением октаэдра, но приводимого к октаэдру стягиванием ребер.

В настоящее время исследуется вопрос о приводимости флаговых симплициальных многогранников к кросс-политопу последовательностью стягиваний ребер. Недавно автором доказано, что *любой трехмерный флаговый симплициальный многогранник может быть приведен к октаэдру последовательностью стягиваний ребер.*

Заявка В. Д. Володина на конкурс фонда Дмитрия Зимина «Династия».