Полугруппы операторов с постоянным спектральным радиусом и их приложения к самоаффинным выпуклым компактам.

Андрей Войнов

14 октября 2012 г.

Исследование посвящено изучению полугрупп операторов с постоянным спектральным радиусом на конечномерном вещественном или комплексном пространстве. Существует хорошо известное геометрическое описание таких семейств, верное в предположении, что у операторов полугруппы не существует общего инвариантного подпространства: найдется норма, в которой все они имеют норму 1. Полугруппы операторов, не имеющих общего собственного подпространства, называются неприводимыми. Для неприводимой полугруппы, порожденной конечным числом невырожденных операторов, можно показать, что она подобна некоторой полугруппе ортогональных операторов. Этот пример и некоторые другие наводят на следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Все операторы неприводимой полугруппы $\mathcal{S}$ имеют спектральный радиус равный 1 тогда и только тогда, когда существует такая скалярная норма $\|.\|$, что для всякого оператора $A \in \mathcal{S}$ его ограничение на линейную оболочку корневых подпространств, отвечающих собственным значениям, равным по модулю 1, является ортогональным в своем подпространстве с индуцированной нормой.*

Предполагается доказать или опровергнуть это предположение, а также обобщить некоторые факты теории полугрупп операторов с постоянным спектральным радиусом на приводимый случай. Также предполагается применить при исследовании теорию уравнений самоподобия. Некоторые результаты по этой тематике уже были получены автором.

Полугруппы операторов с постоянным спектральным радиусом возникают в задаче классификации самоаффинных выпуклых тел. Выпуклый компакт X с непустой внутренностью называется *самоаффинным*, если существует конечный набор аффинных операторов $A_1, \ldots, A_m$ такой, что X является объединением своих аффинных образов $A_1X, \ldots, A_mX$, не имеющих общих внутренних точек. Самоаффинное тело называется *дробящимся*, если при итерации его разбиения диаметр наименьшего элемента может быть сколь угодно мал. Если самоаффинное тело не является дробящимся, то операторы $A_1, \ldots, A_m$ порождают по умножению полугруппу с постоянным спектральным радиусом 1. Оказывается, что все дробящиеся самоаффинные тела являются многогранниками. Класс дробящихся многогранников играет важнейшую роль в задаче классификации самоаффиных тел. Было показано, что любое самоаффинное тело имеет сечение плоскостью, инвариантной относительно операторов $A_1, \ldots, A_m$, являющееся самоаффинным многогранником. Планируется обобщить существующую теорему о структуре самоаффинных тел, используя теорию полугрупп операторов с постоянным спектральным радиусом. В частности, предполагается показать, что вся нетривиальная геометрическая часть структуры самоаффинного тела заложена в его сечении, которое является дробящимся.