Краткое изложение заявки А. А. Муравлёва «Экстремальные задачи в теории случайных процессов»

Настоящее исследование посвящено решению экстремальных задач в теории случайных процессов и состоит из двух частей: байесовских задач последовательного статистического анализа и изучения свойств фрактального броуновского движения.

1. Задачи статистического последовательного анализа содержат два больших класса. Во-первых, задачи о различении гипотез, в которых имеется ненаблюдаемая случайная величина μ, а наблюдению подлежит случайный процесс X_t, структура которого определяется значением μ. Требуется по результатам последовательного наблюдения за X_t проверить гипотезы об истинном значении μ. Во-вторых, задачи о "разладке", в которых имеется ненаблюдаемая положительная величина θ, а наблюдению подлежит случайный процесс X_t, характеристики которого изменяются в момент θ (т.е. происходит "разладка"). Требуется по результатам последовательных наблюдений как можно скорее определить момент времени θ.

В существующей теории известны методы, позволяющие сводить такие задачи к задачам об оптимальной остановке диффузионных процессов, решение которых, в свою очередь, ищется в виде решения соответствующей задачи со свободной границей. Основные трудности состоят в следующем. Во-первых, как правило, данные процессы являются многомерными, в силу чего нахождение точного решения не предоставляется возможным. Во-вторых, даже в случае одномерных, но неоднородных процессов, обычно лучшее, что удается получить – это интегральные уравнения для оптимальных границ остановки. Эти уравнения позволяют построить численное решение, однако из-за сложности данных уравнений, их использование для изучения аналитических свойств границ весьма затруднительно. Настоящее исследование направлено на разработку новых методов решения данных проблем с последующим их применением к конкретным задачам.

В недавней работе автора (совместно с М. В. Житлухиным) изучалась задача Чернова проверки гипотезы положительности нормально распределенного сноса броуновского движения $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$. Были получены интегральные уравнения для оптимальных границ остановки, при выходе на которые нужно останавливать наблюдения

- Планируется рассмотреть свойства оптимальных границ более подробно: показать, что они являются единственным решением полученных интегральных уравнений, построить асимптотическое разложение границы на бесконечности, исходя из интегральных уравнений, и сопоставить с результатами Чернова.
- Планируется рассмотреть следующую задачу: у броуновского движения в случайный момент времени θ появляется снос $\mu \neq 0$, и требуется как можно скорее определить не только момент "разладки" θ, но и величину сноса μ. Для случая двух простых гипотез о величине сноса μ данная задача будет сведена к двумерной однородной задаче со свободной границей. Ее решение потребует развития новых методов, поскольку в настоящее время аналитические методы достаточно хорошо разработаны только для одномерных (однородных и неоднородных) задач.

2. Фрактальное броуновское движение B^H является моделью явлений, обладающих свойством самоподобия. Изучение данного процесса в силу его структуры является достаточно непростой задачей (при $H \neq 1/2$ процесс B^H не является ни марковским процессом, ни семимартингалом). В недавней работе автора было предложено новое представление для процесса B^H в виде линейного функционала от бесконечномерного диффузионного марковского процесса.

- Планируется применить данное представление для исследования экстремальных свойств процесса B^H (в частности, изучить вопрос о получении неравенств), а также разработать методы исследования задач об оптимальной остановке для B^H.