Краткое изложение заявки

Проект предполагает изучение спектрального синтеза для линейных операторов при помощи функциональной модели, недавно полученной А. Барановым и Д. Якубовичем. Говорят, что оператор T допускает спектральный синтез, если любое T-инвариантное замкнутое подпространство M есть замкнутая линейная оболочка корневых векторов T, лежащих в M. Мы говорим, что полная минимальная система векторов в гильбертовом пространстве обладает свойством наследственной полноты, если $x \in \operatorname{closspan}(x, \tilde{x}_n)x_n$, где $\{\tilde{x}_n\}$ - система, биортогональная к $\{x_n\}$. До конца 1990-х годов вопрос о спектральном синтезе исследовался с точки зрения абстрактного функционального анализа без использования какой бы то ни было функциональной модели. На это обстоятельство обратил внимание Н.Никольский, предложивший изучать наследственную полноту и спектральный синтез в конкретном классе пространств, а именно в пространствах де Бранжа. В этом случае оператор T превращался в оператор умножения на независимую переменную, а его собственные вектора - в воспроизводящие ядра в некотором пространстве де Бранжа $H(E)$. Н.Никольский задал следующие два вопроса:

1. Верно ли, что любая полная минимальная система собственных векторов в данном пространстве де Бранжа H(E) обладает полной биортогональной?
2. Верно ли, что любая полная минимальная система собственных векторов в данном пространстве де Бранжа $H(E)$ с полной биортогональной обладает свойством наследственной полноты?

Второй вопрос эквивалентен вопросу о наличии спектрального синтеза для соответствующего оператора. Полный ответ на первый вопрос был получен мной в соавторстве с А. Барановым. В совместной работе с А.Барановым и А. Боричевым были получены некоторые результаты про наследственную полноту в пространствах де Бранжа. Тем не менее, многие важные вопросы остаются открытыми:

1. Верно ли, что любая наследственно полная систем экспонент $\{e^{i\lambda_n t}\}_n$ на интервале $[a, b]$ является базисом суммирования в $L^2[a, b]$?
2.Как можно характеризовать дефектные функции?
3. Какова структура тех разбиений $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ для которых есть дефект?
4. Может ли в произвольном пространстве де Бранжа ортогональное дополнение к смешанной системе быть более чем одномерным или даже бесконечномерным?
5. В каких пространствах де Бранжа полная и минимальная система всегда наследственно полна?