Использование дифференциальных инвариантов в классификационных задачах алгебры, геометрии и дифференциальных уравнений

П. В. Бибиков

Краткое изложение заявки

Проблема классификации различных объектов относительно действия групп преобразований является одной из важнейших проблем математики. Зачастую даже попытки решения тех или иных классификационных задач приводят к созданию новых теорий, а иногда и целых разделов математики.

Практически все классификационные задачи (особенно из геометрии и дифференциальных уравнений) можно переформулировать в терминах *пространств джетов* и *дифференциальных инвариантов*. А именно, рассмотрим множество M классифицируемых объектов (например, гладких функций или векторных полей) и рассмотрим пространства k-джетов J^k этих объектов. Действие группы G на множестве M канонически поднимается до действия $G : J^k$ для всех k. Инварианты действия группы G в пространствах джетов называются *дифференциальными инвариантами*.

Можно доказать, что знание всей алгебры дифференциальных инвариантов позволяет описать орбиты исходного действия группы G на множестве M. Поэтому основная проблема при таком подходе к описанию G-орбит заключается, как правило, в нахождении соответствующих алгебр дифференциальных инвариантов.

Отметим, что известные методы нахождения *конкретных* дифференциальных инвариантов, во-первых, крайне громоздки в вычислительном плане, а во-вторых, неприменимы в общих задачах (например, они неприменимы к проблемам, формулируемым ниже). Более того, в настоящее время не существует общих методов построения алгебр дифференциальных инвариантов (т.е. описания *всех* дифференциальных инвариантов действия групп).

Целью настоящего проекта является развитие подхода, связанного с использованием дифференциальных инвариантов, для классификации различных объектов, и построение алгебр дифференциальных инвариантов действия различных (псевдо)групп на пространствах джетов. В частности, в рамках проекта предполагается исследовать различные классификационные проблемы (как достаточно общего характера, так и конкретные), относящиеся к алгебре, геометрии и дифференциальным уравнениям. Основное внимание будет уделено изучению следующих проблем.

Проблема 1. Рассмотрим однородное пространство $B := G/H$ (на котором группа G действует левыми сдвигами) и векторное расслоение $\pi\colon P \to B$ с действием структурной группы G. Согласно подходу, предложенному Ф. Клейном в рамках «Эрлангенской программы», действие $G : \pi$ определяет нам геометрию, сечения расслоения π являются геометрическими величинами, а изучение геометрии заключается в нахождении инвариантов действия группы G на модуле сечений $\Gamma(\pi)$. *Найти и исследовать поле дифференциальных инвариантов действия структурной группы G на модуле сечений $\Gamma(\pi)$.*

Важным частным случаем данной проблемы является *случай естественного действия структурной группы G в пространстве тензоров на однородном пространстве G/H.*

Также представляет интерес дифференциально-геометрический аналог этой задачи: *классифицировать (косо)симметрические тензорные поля на многообразиях.* Эта задача тесно связана со многими другими интересными проблемами, в частности, с классификацией символов линейных дифференциальных операторов на многообразиях и дифференциальных уравнений типа Монжа–Ампера.

Проблема 2. *Классифицировать дифференциальные уравнения вида $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ относительно действия точечной и контактной псевдогрупп.* Функция y здесь может быть как скалярной, так и векторной (в последнем случае действие контактной псевдогруппы совпадает с точечной).

Эта проблема исследовалась многими математиками (в том числе Ли, Трессе, Лиувиллем, Черном и др.), однако на сегодняшний день точечная и контактная классификации таких уравнений неизвестны при $n \geqslant 3$.