План исследований. Чшиев Аслан Григорьевич

Планируется исследование вырожденных полугрупп линейных ограниченных операторов, полугрупп линейных неограниченных операторов и полугрупп линейных отношений, приложения которых имеют место в теории дифференциальных уравнений и дифференциальных включений. Теория полугрупп линейных ограниченных операторов является сформированным и целостным разделом функционального анализа (см [1,2]). Полугруппы неограниченных линейных операторов [3] и полугруппы линейных отношений [4] являются естественным обобщением полугрупп линейных ограничнных операторов. В настоящее время теория полугрупп линейных неограниченных операторов и полугрупп линейных отношений не имеют систематической развитой теории. Гипотеза проекта основана на предположении эффективного и плодотворного использования современного подхода, развитого в теории полугрупп линейных ограниченных операторов и основанного на использовании техники спектральной теории линейных отношений [5-7].

Пусть X – банахово пространство, $EndX$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. *Полугруппой линейных ограниченных операторов* называется сильно непрерывная операторнозначная функция $T : (0,\infty) \to EndX$, обладающая полугрупповым свойством:

$$T(t+s) = T(t)T(s), t, s > 0.$$

Через $LR(X)$ обозначим множество линейных отношений на пространстве X. *Полугруппой линейных отношений на подпространстве* $Y \subset X$ называется векторнозначная функция $S : (0,\infty) \to LR(X)$ со свойством:

$$S(t+s)x = S(t)S(s)x, \text{ для всех } x \in Y.$$

Ясно, что $Y \subset D_2(S)$, где $D_2(S) = \bigcap\limits_{t,s>0} D(S(t)S(s))$, и $D(S(t))$ – есть область определения отношения $S(t)$. Таким образом, полугруппы линейных отношений являются обощением понятия полугруппы линейных ограниченных операторов, имея более сложную, но схожую, структуру и поэтому являясь более сложным объектом исследования, по сравнению с полугруппами линейных ограниченных операторов. В настоящее время теория полугрупп линейных отношений слабо изучена. Целью проекта является развитие теории полугрупп линейных отношений.

Проведенные исследования

Траекторией точки $x \in D_1(S)$ относительно полугруппы линейных отношений S на подпространстве Y называется векторная функция $\xi_x : [0, \infty) \to X$ со свойствами:

$$\xi_x(0) = x, \xi_x(t) \in S(t)x, t > 0.$$

Понятие расщепимой полугруппы линейных отношений является обобщением понятия *гиперболичности* для полугрупп линейных ограниченных операторов. Полугруппа линейных отношений $S : (0, \infty) \to LR(X)$ на подпространстве Y называется ***расщепимой***, если выполнены следующие условия:

1) подпространство Y есть прямая сумма подпространств $X_- \oplus X_0 \oplus X_+$;

2) сужения $S_-(t), t > 0$, отношений $S(t), t > 0$, на подпространство X_- образуют полугруппу операторов на пространстве X_-;

3) сужения $S_+(t), t > 0$, отношений $S(t), t > 0$, на подпространство X_+ непрерывно обратимы и операторы $S_+(t)^{-1}, t > 0$, образуют полугруппу;

4) сужения $S_0(t), t > 0$, отношений $S(t), t > 0$, на подпространство X_0 образуют обратимо-нулевую полугруппу линейных отношений на пространстве X_0.

Пусть X_0 – подпространство из X. На подпространстве X_0 определим полугруппу линейных отношений

$$T_0 : (0, \infty) \to LR(X_0),$$

$$T_0(t)x = \begin{cases} 0, x \neq 0, \\ X_0, x = 0, \end{cases}$$

Полугруппу T_0 будем называть *обратимо-нулевой.*

Следующие результаты получены, рассказывались на семинаре, но не опубликованны на данный момент.

• Через понятие траектории даны определения гладкости и генераторов полугруппы линейных отношений;

• Построена и исследована полугруппа линейных отношений, получающуюся путем обращения вырожденной полугруппы операторов;

• По заданному нормальному линейному отношению с предположениями на его спектр построена расщепимая полугруппа линейных отношений и исследованны ее свойства.

Проект будущих исследований

• Формулирование основных определений, поиск эффективных методов исследования и изучение свойств полугрупп линейных отношений.

• Построить *расщепимую* полугруппу линейных отношений по заданному линейному отношению, спектр которого отделен от мнимой оси. Описание свойств построенной полугруппы линейных отношений. Написание статьи по итогам данного исследования.

• Поиск приложений теории полугрупп линейных отношений. По аналогии с полугруппами линейных ограниченных операторов, задача заключается в проверке возможности и описании приложений полугрупп линейных операторов к теории дифференциальных уравнений и дифференциальных включений.

Библиография

1. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс.- М.: ИЛ, 1962.

2. Engel K.J., Nagel R. One - Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K.J. Engel, R. Nagel -New York: Springer Verlag.- 2000.

3. Hughes Rhonda Jo. Semigroups of Unbounded Linear Operators in Banach Space /Rhonda Jo Hughes // Transactions of the American Mathematical Society.- 1977 Vol. 230.- pp. 113-145.

Современная математика. Фундаментальные наприавления.- 2006.- Т.14.- М.- С. 3-155.

4. Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений / А.Г. Баскаков // Изв. РАН. Серия матем.- 2009.- Т.73.- №2.- С. 3–68.

5. Баскаков А.Г., Чернышов К. И. Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы / А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов // Матем. сборник- 2002.- Т.193.- №11.- С. 3-42.

6. Баскаков А.Г. Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов / А. Г. Баскаков // Матем. заметки- 2008.- Т.84.- №2.- С. 175-192.

7. Чшиев А.Г. Теорема Герхарда - Прюсса для вырожденных полугрупп / А. Г. Чшиев — Воронежский государственный университет, 2011.- Препринт № 39, 34 С.

8. Рицнер В. С. Теория линейных отношений / В. С. Рицнер // Деп. в. ВИНИТИ.- 1982.- №846—82.

9. Arens R. Operational calcules of linear relations / R. Arens // Pacific J. Math.- 1961. V11.- P.9-23

10. Cross R. Multivalued linear operators / R. Cross - New York: M. Dekker.- 1998.

11. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi - New York: M. Dekker.- 1998.

12. van der Mee C. Exponentially Dichotomous Operators And Applications / C. van der Mee -Birkhauser: Verlag AG.- 2008.