1 Группы диффеоморфизмов окружности. План исследования.

Дмитрий Филимонов

Одним из известных вопросов теории динамических систем является следующая

Гипотеза. *Рассмотрим конечно-порождённую группу* $G \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$. *Если её действие минимально, то оно эргодично относительно меры Лебега.*

Эта гипотеза была сформулирована в конце 60-х–начале 70-х годов XX века многими авторами, включая Ж. Эктора и Э. Жиса. Отметим, что даже для случая одного диффеоморфизма окружности эта гипотеза не является очевидным следствием классификационной теоремы Пуанкаре. Дело в том, что сопряжение между минимальным диффеоморфизмом и соответствующим иррациональным поворотом может не быть абсолютно непрерывным — поэтому эргодичность поворота не влечёт за собой эргодичность в смысле меры Лебега исходного отображения.

Тем не менее, с помощью значительно более тонких рассуждений, в случае одного диффеоморфизма гипотеза была доказана — одновременно и независимо — А. Б. Катком и М. Эрманом.

Для случая более богатой (не обязательно сохраняющей какую-нибудь меру) динамики, основной идеей, лежащей в основе доказательств эргодичности, является идея экспоненциального растяжения (и, более общо, растяжения с контролем искажения). Препятствием к применимости этой техники является наличие *нерастяжимых точек*. Однако, наличие нерастяжимых точек не противоречит минимальности действия (даже аналитической) группы диффеоморфизмов: примерами служат стандартное действие $PSL_2(\mathbb{Z})$ и (для гладкого случая) гладкая реализация Жиса-Сержиеску группы Томпсона.

Все известные на текущий момент примеры минимальных действий с нерастяжимыми точками отличаются от этих двух незначительными модификациями. В частности, все они обладают следующим свойством: *нерастяжимые точки являются односторонне изолированными неподвижными* для некоторых элементов группы. Конечно-порождённая группа $G \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$ называется *N-группой*, если её действие минимально, множество $\mathrm{NE}(G)$ непусто, и всякая нерастяжимая точка $x \in \mathrm{NE}(G)$ обладает свойством односторонней изолированной неподвижности.

Оказывается, для таких групп всё ещё возможно построить процедуру растяжения с контролем искажения и соответствующая теорема была доказана Б. Деруаном, В. Клепцыным и А. Навасом.

Оба вышеупомянутых примера (гладкая реализация группы Томпсона и $PSL_2(\mathbb{Z})$) обладают рядом других интересных свойств: они порождаются (в определённом смысле) нестрого-растягивающей «марковской» динамикой, и для них показатель Ляпунова растяжения равен нулю. Совместно с Клепциным В.А. автору удалось показать, что действие произвольной N-группы по построению в определенном смысле напоминает действие гладкой реализации Жиса-Сержиеску группы Томпсона. Кроме того, были сформулированы и другие специфичные свойства N-групп, такие как равенство нулю показателя Ляпунова для растягивающей динамики группы и сингулярность стационарной меры относительно меры Лебега.

В дальнейшем автор планирует продолжить исследование групп диффеоморфизмов окружности с нерастяжимыми точками. Так, разрабатываются подходы к доказательству гипотезы об эргодичности. Кроме того, автор планирует продолжить исследование особенностей групп, для которых наличествуют нерастяжимые точки.