

Краткое изложение заявки, Гарбер Алексей Игоревич.

Данный проект посвящен исследованиям в теории параллелоэдров. Параллелоэдром называется многогранник, параллельными переносами которого можно замостить все d -мерное пространство. В частности в двумерном пространстве параллелоэдрами являются параллелограммы и центрально-симметричные шестиугольники.

Теория параллелоэдров берет свое начало из работ Федорова (1885) и Минковского (1895). В первой работе приведена классификация трехмерных параллелоэдров, а во второй доказаны условия, которым удовлетворяет любой параллелоэдр: он и все его гиперграницы являются центрально-симметричными, а также его проекция вдоль любой грани коразмерности 2 является параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником. Позднее Венков (1954) доказал, что эти условия являются достаточными, для того чтобы многогранник был параллелоэдром.

Две основные гипотезы в теории параллелоэдров были сформулированы Вороным в 1908. Первая гипотеза Вороного утверждает, что любой d -мерный параллелоэдр аффинно эквивалентен многограннику Дирихле-Вороного для некоторой d -мерной решетки. Вторая гипотеза Вороного утверждает, что среди векторов, соединяющих центры параллелоэдров, соседних по гипергранице, можно выбрать базис решетки разбиения.

В рамках данного проекта планируется исследовать возможные подходы к гипотезам Вороного или к задачам, тесно с ними связанными.

К настоящему моменту автором получены следующие результаты в теории параллелоэдров: доказана вторая гипотеза Вороного в случае зонотопов, являющихся параллелоэдрами. Доказана верхняя оценка на поясной диаметр (то есть на диаметр графа, в котором вершинами служат пары противоположных гиперграней параллелоэдра, которые соединены ребрами в случае если у каких-то двух граней из этих пар есть общая грань коразмерности 2) зонотопов, являющихся параллелоэдрами в зависимости от их размерности. Доказано, что поясной диаметр зонотопа, векторы зон которого, являются ребрами перестановочного многогранника, не превосходит 2 в случае размерности меньше 6 и 3 в случае произвольной размерности. Совместно с А.А. Гаврилюком и А.Н. Магазиновым доказано, что если фундаментальная группа поверхности параллелоэдра P с удаленными непримитивными гранями коразмерности 2 (то есть грани, проекции вдоль которых есть параллелограммы) порождена "полупоясами", то P удовлетворяет гипотезе Вороного.

В дальнейшем планируется исследовать возможность применения указанного выше свойства для различных классов параллелоэдров. В первую очередь это могут быть четырехмерные параллелоэдры, полная классификация комбинаторных типов которых была получена Делоне (1929) и Штогриным (1973).

Далее планируется исследовать как изменяется возможность применения данного свойства для других классов параллелоэдров, например для зонотопов или 3-неприводимых параллелоэдров.

Кроме того, планируется продолжить исследование поясных диаметров зонотопов и произвольных параллелоэдров, в частности планируется получить точные верхние оценки на поясные диаметры зонотопов, являющихся параллелоэдрами при $d \leq 15$, планируется построить пример зонотопов, являющихся параллелоэдрами с нетривиальной (больше 2) оценкой на поясной диаметр.