Краткое изложение заявки

Исследования будут вестись в области диофантовых приближений. Основным объектом исследования будет многомерное обобщение меры иррациональности числа, в частности, так называемые диофантовы экспоненты.

Определение. Пусть задана матрица $\Theta \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и функция $f : \mathbb{R}_{\geqslant 1} \to \mathbb{R}_+$. Говорят, что f является *мерой иррациональности* Θ или что Θ является *f–приближаемой*, если неравенство

$$|\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant f(|\mathbf{x}|)$$

имеет бесконечно много решений в $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$. Соответственно, *диофантовой экспонентой* матрицы Θ называется супремум таких $\gamma \in \mathbb{R}$, что Θ является $t^{-\gamma}$–приближаемой.

Первые результаты о диофантовых экспонентах были получены в 20-х годах прошлого века. Самыми известными из них являются неравенства переноса Хинчина и Ярника. В последние годы эта область стала весьма активно развиваться и привлекла внимание таких крупных специалистов, как М.Лоран, Я.Бюжо, Д.Руа, Н.Г.Мощевитин, а также классика теории диофантовых приближений В.Шмидта. Ими были получены неравенства переноса, связывающие различные типы диофантовых экспонент. Соискателем также был сделан существенный вклад: полученные им результаты являются одними из самых сильных в данной области. Метод, разработанный соискателем, позволил усилить в частном случае классическую теорему переноса, принадлежащую Малеру, — в случае, соответствующем задаче о диофантовых экспонентах матрицы. Отметим, что почти все теоремы переноса для диофантовых экспонент следуют из теоремы Малера при надлежащем выборе параметров.

В рамках предлагаемого проекта теорема Малера будет усилена в самой общей своей формулировке — для произвольных d линейно независимых линейных форм от d переменных. В качестве следствия будет получен ряд новых утверждений в духе теорем переноса, затрагивающих все последовательные минимумы двойственных решеток (в то время как классическая теорема Малера связывает непосредственно лишь первые последовательные минимумы).

Далее, в ходе выполнения проекта планируется усилить существующие неравенства, связывающие так называемые промежуточные диофантовы экспоненты (отвечающие за приближение пространства решений системы $\Theta\mathbf{x} = \mathbf{y}$ рациональными подпространствами произвольной фиксированной размерности). А именно, экспоненты будут заменены на произвольные функции, удовлетворяющие естественным условиям роста. Такого рода усиление важно с точки зрения задач типа гипотезы Литтлвуда и задач о приближении алгебраических чисел рациональными, когда для измерения порядка приближения не хватает экспоненциальных функций и нужны функции “промежуточного” роста (так, к примеру, из теоремы Рота следует, что диофантова экспонента иррационального алгебраического числа равна единице, но вопрос о том, верно ли, что любое алгебраическое число степени большей чем 2 является ct^{-1}–приближаемым при произвольном положительном c, остается открытым).

Наконец, наработанную технику планируется впоследствии применить в задачах, связанных с гипотезой Вирзинга о приближении вещественных чисел алгебраическими.