

Summary: Кузнецов Александр Алексеевич

Вычислительная теория групп – область науки на стыке математики и информатики, изучающая группы с помощью вычислительных машин. Необходимость такого рода исследований вызвана тем, что в теории групп имеется большое число задач, решить которые без помощи компьютерных вычислений в настоящее время не представляется возможным.

Проведенные исследования

Автором проекта был создан и реализован на ЭВМ ряд алгоритмов для исследования алгебраических систем. При помощи компьютерного моделирования ряда групп, а также теоретико-группового анализа были решены следующие задачи:

1. Решен вопрос Ч. Симса о структуре соотношений бернсайдовой группы $B(2, 5)$, который он опубликовал в Журнале Символьных Вычислений в 1991 году.
2. Решена проблема 16.57 из "Коуровской тетради" о распознаваемости по спектру проективной специальной линейной группы размерности два над полем из семи элементов – группы $L_2(7)$.
3. Изучены подгруппы специального вида в наибольшей конечной двупорожденной группы периода 5 – группе $B_0(2, 5)$.

В будущем автор планирует продолжить работу по созданию новых и усовершенствованию имеющихся алгоритмов и программ для исследования алгебраических систем. Важной частью работы является адаптация полученного комплекса программ для работы на суперкомпьютере. Затем будет продолжено изучение групп периода 5, а также симметрических групп, заданных специальным множеством порождающих элементов.

Компьютерное моделирование бернсайдовых групп

Пусть $B_0(2, 5, k)$ – максимальная конечная двупорожденная бернсайдова группа периода 5 степени нильпотентности k . В данном классе групп наибольшей является группа $B_0(2, 5, 12)$, порядок которой равен 5^{34} . Для каждой из $B_0(2, 5, k)$ известны представления, которые несложно получить, используя систему компьютерной алгебры GAP. Однако такие интересные характеристики, как функция роста группы и диаметр Кэли до сих пор не изучены. В настоящей работе предлагается устранить указанный пробел. Положим $X = \{x, y\}$ – порождающие элементы $B_0(2, 5, k)$. Для вычисления функции роста и диаметра Кэли относительно X необходимо перечислить все элементы группы в формате минимальных слов. Вычислив количество слов на каждой длине, можно будет получить функцию роста группы, а максимально возможная длина минимальных слов будет являться диаметром Кэли группы. Данные результаты интересны сами по себе, поскольку будут получены новые свойства классических алгебраических систем, кроме того, они могут быть полезны при решении вопроса о конечности группы $B(2, 5)$.

Компьютерное моделирование симметрических групп

Зададим симметрическую группу S_n степени n следующим множеством подстановок: $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (2, 3)$, ..., $x_{n-1} = (n-1, n)$, $x_n = (1, n)$. Автору удалось при помощи компьютерных вычислений получить значения d диаметров Кэли группы S_n для $n = 2, 3, \dots, 12$. В связи с эксоненициальным ростом числа элементов в группах S_n дальнейшее компьютерное решение задачи для $n > 12$ затруднительно. Тем не менее, полученные частные решения дали возможность сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. Пусть группа S_n задана множеством подстановок x_1, x_2, \dots, x_n , тогда $d = \frac{n^2}{4}$ для четных n и $d = \frac{n^2 - 1}{4}$ для нечетных n .

В ближайшее время планируется представить доказательство, подтверждающее справедливость указанной гипотезы.