

## Краткое изложение заявки. Кузнецов Степан Львович

Исчисление Ламбека  $L$  было введено Ламбеком в 1958 году для описания синтаксиса естественных и формальных языков. Типы (формулы) этого исчисления строятся из счётного набора переменных с помощью трёх связок: левое деление, правое деление, умножение. В исчислении Ламбека выводятся секвенции — выражения, состоящие из двух частей, правая часть — тип, а левая — последовательность типов. Правила исчисления Ламбека соответствуют генценовским секвенциальным правилам для конъюнкции (умножение) и импликации (левое и правое деления), а явных структурных правил нет.

Рассматриваются также различные варианты исчисления Ламбека: во-первых, его фрагменты, получаемые ограничением набора связок и/или переменных; во-вторых, исчисление без условия непустоты левой части секвенции ( $L^*$ ) и его варианты; в-третьих, обогащения исчисления Ламбека новыми связками.

Любой вариант исчисления Ламбека можно использовать в качестве базового исчисления для *категориальных грамматик*. Категориальная грамматика состоит из алфавита, выделенного типа и соответствия между буквами алфавита и типами. Слово принадлежит языку, задаваемому грамматикой, если можно так подобрать типы, находящиеся в соответствии с буквами этого слова, что секвенция, где слева стоит последовательность этих типов, а справа — выделенный тип, выводима в рассматриваемом исчислении.

Известно, что класс языков, основанных на исчислении Ламбека, совпадает с классом контекстно-свободных языков без пустого слова (Гайфман 1960, Бушковский 1985, Пентус 1995); кроме того, для порождения всех контекстно-свободных языков без пустого слова достаточно фрагмента, в котором оставлена только одна операция деления.

Автором доказано, что для порождения всех контекстно-свободных языков без пустого слова достаточно фрагмента исчисления Ламбека, в котором оставлены только одна операция деления и только один примитивный тип (это наименьший невырожденный фрагмент исчисления Ламбека). Аналогичный результат получен и для исчисления  $L^*$  (и класса всех контекстно-свободных языков).

Исчисление Ламбека с единицей получается из исчисления  $L^*$  добавлением в язык константы (выделенного примитивного типа)  $\mathbf{1}$ , понимаемой как единица относительно умножения и соответствующих аксиом и правил. Автором доказано, что добавление единицы не увеличивает класса языков, порождаемых  $L^*$ -грамматиками: это по-прежнему все контекстно-свободные языки.

Типы исчисления Ламбека допускают естественную интерпретацию формальными языками над некоторым алфавитом (подмножествами свободной полугруппы, в случае исчисления  $L$ , или свободного моноида, в случае исчисления  $L^*$ ): примитивные типы интерпретируются произвольным образом, а связки — как естественным образом определяемые операции умножения и деления языков. Такие интерпретации называются  $L$ -моделями. Заметим, что следует различать  $L$ -модели с пустым словом и без пустого слова: определения операций деления различаются. Для исчислений  $L$  и  $L^*$  имеют место теоремы о полноте (Пентус 1999): секвенция выводима в исчислении  $L$  ( $L^*$ ), если и только если она истинна во всех  $L$ -моделях без пустого слова (соответственно, с пустым словом).

Автором предъявлено исчисление  $L^R$ , расширяющее  $L$  новой операцией  $^R$ , соответствующей обращению языка (все слова записываются в обратном порядке), и доказана его полнота относительно  $L$ -моделей. Также доказано, что все языки, порождаемые  $L^R$ -грамматиками, контекстно-свободны.

В 2013 году планируется решить некоторые из следующих задач:

1. Завершение исследования исчисления Ламбека с операцией обращения: доказательство полноты относительно  $L$ -моделей варианта исчисления  $L^R$ , допускающего пустые левые части секвенций; доказательство теорем об устранении правила сечения для  $L^R$ .

2. Известно, что исчисление Ламбека с единицей неполно относительно  $L$ -моделей (константа  $\mathbf{1}$  интерпретируется как язык, состоящий только из пустого слова). Задача состоит в построении исчисления с константой  $\mathbf{1}$  (хотя бы с одной связкой деления) и полного относительно  $L$ -моделей.

3. Добавим к исчислению Ламбека правило перестановки типов в левой части секвенции. Получится коммутативное исчисление Ламбека  $LP$ . Какой класс языков порождают  $LP$ -грамматики? Относительно каких классов моделей на подмножествах коммутативных полугрупп полно исчисление  $LP$ ? В частности, полно ли оно относительно моделей на подмножествах полугруппы целых положительных чисел?

4. Известно (Сафиуллин 2007), что все контекстно-свободные языки без пустого слова порождаются  $L$ -грамматиками, в которых для любой буквы алфавита соответствует не более одного типа. Верно ли аналогичное утверждение для  $L^*$ ? для  $L(\setminus)$ ?