2. Матричные инварианты и полуинварианты колчанов

Аннотация исследовательского проекта Лопатина А.А.

Инварианты действий алгебраических групп на векторных пространствах (или более широко, на аффинных многообразиях) изучаются достаточно давно. Начало теории инвариантов можно отнести к 50-м годам 19-го века, к работам Буля, Кэли, Эрмита и Сильвестра. В своих эпохальных работах Д. Гильберт (1893) доказал конечную порождаемость алгебры инвариантов линейно редуктивной группы. Новое развитие теория инвариантов получила в работах И. Шура, Г. Вейля, Р. Брауэра. Итог этой деятельности содержится в классической книге Г. Вейля (1947), посвященной инвариантом векторов и ковекторов классических линейных групп. Естественным обобщением данной конструкции являются полиномиальные *инварианты нескольких матриц* под действием классической линейной группы диагонально сопряжениями. Матричные инварианты тесно связаны с такими разделами алгебры как теория представлений и теория алгебр с полиномиальными тождествами. А именно, они играют ключевую роль в классификации полупростых представлений свободной ассоциативной алгебры. С другой стороны, наиболее перспективным подходом к описанию тождеств алгебры $n \times n$ матриц является изучение тождеств матриц с формами, которое, фактически, эквивалентно изучению тождеств матричных инвариантов полной линейной группы.

Матричные инварианты для полной линейной, ортогональной и симплектической группы были описаны в работах К.С. Сибирского, Ю.П. Размыслова и К. Прочези в 70-е годы 20-го века. А именно, было установлено, что инварианты порождаются следами от произведений общих матриц и, в случае $O(n)$ и $Sp(n)$ транспонированных и симплектически транспонированных матриц, соответственно. Были также описаны идеалы тождеств между порождающими. Например, в случае $GL(n)$ идеал тождеств порождается следом от $\chi_n(x)y$, где $\chi_n(x)$ — это тождество Гамильтона–Келли для матрицы x.

Все упомянутые результаты были получены над полями нулевой характеристики. Их перенос на случай (бесконечных) полей *положительной* характеристики был крайне затруднитен из-за ряда факторов. Например, в случае нулевой характеристики алгебра инвариантов порождается своими мультилинейными элементами, что неверно в общем случае. Кроме того, классические методы перехода от матричных инвариантов к инвариантам векторов и ковекторов здесь не работают.

Благодаря применению геометрических методов и теории представлений, С. Донкин (1992) описал порождающие матричных инвариантов полной линейной группы. Этот результат был перенесен на случай ортогональной и симплектической группы А.Н. Зубковым (1999). Тождества матричных $GL(n)$-инвариантов были найдены А.Н. Зубковым (1996), а $O(n)$-инвариантов — А.А. Лопатиным (2012). В данном проекте мы планируем

- завершить описание порождающих и тождеств между ними матричных инвариантов для всех классических линейных групп над полями произвольной характеристики.

Колчаном называется конечный ориентированный граф. Ставя в вершины колчана векторные пространства, а в ребра — линейные отображения между ними, мы получим пространство представлений колчана, на котором действует произведение полных линейных групп заменой базисов в вершинах. Беря произведение специальных линейных групп мы можем определить полуинварианты представлений колчанов, которые тесно связаны с такими объектами алгебры как коэффициенты Литлвуда–Ричардсона и кластерными алгебрами, введеными А. Зелевинским и С. Фоминым. Порождающие полунвариантов колчанов были описаны в начале 21-го века М. Домокосом, А.Н. Зубковым, Х. Дерксеном, Дж. Вайманом, А. Скофилдом и Л. Ле Брюном. В данном проекте мы планируем

- описать тождества между полуинвариантами представлений колчанов;
- описать векторы размерности и колчаны, которым соответствуют полиномиальные алгебры полуинвариантов представлений колчанов.