

Топологические теории, операторы Бакстера и соответствие Ленглендса

С.В. ОБЛЕЗИН

Аннотация

Целью проекта является обнаружение и исследование новых геометрических и аналитических структур в теории чисел и теории автоморфных форм. Основным инструментом предлагаемого подхода являются бесконечномерные анализ и геометрия, — наиболее интенсивно развивающиеся разделы современной науки, и имеющие самые разнообразные приложения: от теории чисел и современной математической физики до моделирования полимеров и экономики.

На первый взгляд, для изучения бесконечномерного объекта его удобно представить как предел конечномерных аналогов, и изучить возникающие конечномерные аналоги интересующего объекта. Однако, зачастую наиболее интересные и важные объекты оказываются "сугубо бесконечномерными", не имеющими подходящих конечномерных аналогов. Это порождает разнообразие моделей и парадигм для изучения бесконечномерных объектов; при этом разные модели описывают лишь ограниченный набор свойств изучаемого объекта, что, в частности, не позволяет выделить одну, лучшую модель, и обязывает принимать во внимание сразу все имеющиеся парадигмы. Здесь уместно сравнение с тремя слепыми, пытающимися описать слона: один ощупывает хвост, другой — хобот, а третий — ногу.

Одним из важных "сугубо бесконечномерных" объектов в теории чисел и теории автоморфных форм является гамма-функция Эйлера, играющая ключевую роль как для описания аналитических свойств дзета-функции Римана, так и в программе Ленглендса. Проблема нахождения удобной модели для изучения гамма-функции и/или нахождения подходящих конечномерных аналогов имеет давнюю историю, тем не менее, приемлимое решение пока не известно. Решение этой задачи и лежит в основе предлагаемого проекта исследований.

Программа Ленглендса содержит новый ракурс в изучении бесконечномерных объектов, принимая во внимание их скрытые симметрии, а также устанавливая новые крайне нетривиальные связи между конечномерными и бесконечномерными объектами. В частности, локальное соответствие Ленглендса отождествляет две аналитические функции, L -функции, задаваемые произведением гамма-функций; одна функция строится по конечномерному объекту из теории чисел, а другой — по бесконечномерному объекту в теории представлений. При этом конечномерное представление ни коим образом не связано с бесконечномерным, более того, оба представления строятся из разных объектов, в разных разделах математики. Причина совпадения L -функций, построенных по таким разным объектам, конечномерному и бесконечномерному, далека от ясного понимания, и является предметом интенсивного изучения в течение последних десятилетий.

По счастью, похожие явления являются предметом необычайного интереса в квантовой теории поля и теории струн, когда конечномерные системы обладают бесконечномерными скрытыми симметриями, и наоборот. Недавно мне (совместно с А.А.Герасимовым и Д.Р.Лебедевым) удалось обнаружить новое описание классической гамма-функции Эйлера, а также локальных L -функций, в виде симплектического объема бесконечномерного пространства голоморфных функций на двумерном диске. Эта конструкция мотивирована теорией струн, и открывает новый взгляд на теорию чисел и программу Ленглендса. Кроме того, нами было показано, что зеркальная симметрия в теории струн на многообразиях флагов совпадает с локальным соответствием Ленглендса, что открывает широкие возможности для применения топологических, геометрических и аналитических методов и конструкций в теории чисел и в теории автоморфных представлений.

В предлагаемом проекте планируется развитие полученных геометрических и аналитических методов в рамках программы Ленглендса и многомерной теории чисел. В частности, в рамках проекта предполагается синтезирование наших результатов с имеющимися алгебро-геометрическим подходом Бейлинсона-Дринфельда к соответствию Ленглендса, что должно привести к появлению новых конструкций и к "синергетическому эффекту" в различных направлениях математической физики, теории чисел и теории представлений. Следует ожидать, что это обеспечит существенный прогресс в бесконечномерной геометрии и анализе, и, в частности, применительно к программе Ленглендса.