

## **Уравнения Пенлеве-Шлезингера, интегрируемые системы и конформные теории поля**

Настоящий проект посвящен исследованию универсальных интегрируемых структур, связанных с уравнениями изомонодромных деформаций и конформными теориями поля. В проект входят несколько наборов связанных между собой задач. Одна из целей - создание описания и формулировок интегрируемости и близких к нему понятий (таких, например, как свойство Пенлеве) адекватных и содержательных для соответствующих топологических и конформных теорий поля.

Первый набор задач связан с объединением теоретико-группового и алгебро-геометрического подходов к исследованию интегрируемости. На этом пути (совместно с А.М. Левиным, М.А. Ольшевским и другими) широкий класс интегрируемых моделей был описан в терминах голоморфных  $G$ -расслоений и соответствующих пространств модулей (подход Хитчина). Разработанный метод позволяет получать ту или иную интегрируемую систему с помощью редукции из свободной теории поля. Одним из ключевых наблюдений стало осознание роли модификации расслоений как сингулярного калибровочного преобразования, связывающего различные семейства интегрируемых систем, солитонных уравнений и уравнений изомонодромных деформаций. А именно, было определено понятие Симплектического Соответствия Гекке (ССГ) как соответствия интегрируемых систем, связанных процедурой модификации расслоений. Эта процедура, в простейшем случае описывающее изменение степени расслоения на единицу, в общем случае связывает расслоения с различными характеристическими классами, такими как классы Штиффеля-Уитни для ортогональных групп. С точки зрения интегрируемых систем модификации связывают многочастичные системы (типа Калоджеро и спиновых обобщений) с многомерными интегрируемыми волчками (типа Эйлера-Арнольда). Другими словами модификация является сингулярным калибровочным преобразованием, осуществляющим каноническое преобразование с явной заменой переменных. В последних работах в общем случае (для произвольного характеристического класса) были построены интегрируемые системы, содержащие оба типа степеней свободы, получены явные выражения для операторов Лакса и новые динамические  $g$ -матрицы (классические и квантовые), а также соответствующие уравнения КЗБ. В продолжение данных исследований предполагается явно построить действие операторов Гекке (модификаций) на пространстве конформных блоков. Еще одна интересная задача - построение полевого  $(1+1)$  обобщения систем Шлезингера. Это приводит к новому типу уравнений нулевой кривизны и новому типу нелинейных уравнений.

Второй набор задач связан с исследованием классическо-квантового соответствия для уравнений Пенлеве. Уравнения изомонодромных деформаций и, в частности, уравнения Пенлеве описывают в терминах пары линейных задач. Само уравнение возникает как условие нулевой кривизны (или условие совместности) тождественно по спектральному параметру. В соавторстве с А.Забродиним соискателем было показано, что из матричных линейных задач на одну из компонент их общего решения, следует скалярное уравнение, имеющие вид нестационарного уравнения Шредингера с классическим потенциалом Пенлеве. Тем самым, исходная линейная задача приводит как к классической (условие совместности) так и квантовой (на компоненту решения, как функции от спектрального параметра) задачам. Планируется исследование обратной задачи, то есть построение уравнений, удовлетворяющих классическо-квантовому соответствию. Ожидается, что таковыми окажутся только уравнения Пенлеве. Тогда о классическо-квантовом соответствии можно будет говорить как об альтернативном определении свойства Пенлеве.

Третий набор задач связан с исследованием соотношений между различными классами интегрируемых систем, следующих из гипотезы АГТ. Данная гипотеза связывает конформные блоки некоторой конформной теории с интегралами типа функции Некрасова, возникающих в деформированной теории Зайберга-Виттена. Нами было показано, что на уровне интегрируемых систем указанные соотношения связывают в простейшем случае специальные системы Годена ранга  $N$  с  $XXX$   $GL(2)$  спиновой цепочкой Гейзенберга из  $N$  узлов. Спектральные кривые оказываются одинаковыми при замене переменной характеристического уравнения на спектральный параметр, поэтому полученная связь была названа спектральной дуальностью. Планируется описать обобщения этой дуальности в различных направлениях. В частности, построить модели Годена двойственные  $XXZ$  и, что особенно интересно,  $XYZ$  цепочкам.

Более подробно указанные выше задачи описаны в плане исследования.