

# Графы с малым локальным хроматическим числом

## Краткое изложение заявки

И. И. БОГДАНОВ

Данный проект посвящён экстремальной теории графов. Целью его является изучение связи локальных и глобальных свойств раскрасок графов. Важность этих вопросов и интерес к ним в последние годы повышается, в частности, в связи с исследованиями особо больших графов — например, связанных с компьютерными сетями.

Нас в первую очередь интересует вопрос о связи между хроматическим числом графа и его  $r$ -локальным хроматическим числом, то есть максимальным хроматическим числом его (индуцированного) подграфа радиуса  $r$ . Известный результат Эрдёша о графах с большим хроматическим числом без малых циклов показывает, что ограниченность локального хроматического числа сама по себе не влечёт никаких ограничений на глобальное хроматическое число. Однако все известные подобные примеры (конструктивные или неконструктивные) достаточно велики.

Мы исследуем связь между данными двумя числами при дополнительных ограничениях, в первую очередь — на количество вершин. Известный результат Кирстеда, Семереди и Троттера даёт оценку на хроматическое число графа в терминах количества вершин и  $r$ -локального хроматического числа. Однако этот результат работает лишь при количестве вершин, не слишком большом по сравнению с радиусом  $r$ . Известны также явные подобные оценки в случаях, когда глобальное хроматическое число или радиус малы.

Недавно автором совместно с С. Л. Берловым были получены нетривиальные нижние оценки на количество вершин графа с произвольным хроматическим числом, не содержащим малых нечётных циклов (иначе говоря, с  $r$ -локальным хроматическим числом 2); при этом важную роль играет оценка максимального количества вершин в  $r$ -окрестности вершины графа. В проекте предполагается обобщить этот результат на произвольные графы с ограниченным  $r$ -хроматическим числом. Методы из предыдущей статьи, по видимости, допускают усиление, которое само по себе позволит получить оценку на количество вершин порядка  $C_r \chi^{r+1}$  (здесь  $\chi$  — хроматическое число графа).

Однако прямолинейное применение этих методов, по-видимому, даст весьма неточные оценки на количество вершин при малых  $n$ ; соответственно, и (рекуррентные) оценки на большие значения будут ощутимо неточны. Для их улучшения требуется оценить размер наибольшей окрестности вершины радиуса  $r$ . При малых значениях радиуса с этой целью можно использовать известные результаты; для «переходных» же значений, когда радиус и хроматическое число имеют одинаковый порядок, для подобной оценки требуются новые методы. Эти методы также планируется разработать. Кроме того, мы собираемся получить более точные оценки при зафиксированном малом значении одного из параметров  $\chi$  или  $r$ .

Наконец, отметим ещё один вопрос, тесно связанный с этой тематикой. Одной из важных проблем в изучении  $n$ -критических графов (то есть минимальных по включению  $n$ -хроматических графов) является оценка минимального количества рёбер в  $n$ -критическом (и, как следствие, в  $n$ -хроматическом) графе. Заметим, что оценка размера ограниченной окрестности  $U_G(r, v)$  влечёт за собой оценку числа рёбер в этой окрестности. Эта оценка может быть усилена в том случае, если хроматическое число этой окрестности не слишком мало. Таким образом, представляется, что планируемые результаты — вкупе с соображениями, связанными с хроматическим числом окрестности, — позволят оценить число рёбер критического графа как минимум в случае малого локального хроматического числа этого графа. Последнее условие, возможно, удастся опустить.