НАХОЖДЕНИЕ ПЛОТНОСТИ УПАКОВКИ В РАЗМЕРНОСТЯХ 8 И 24 И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ:

Краткое изложение заявки

В начале XVII-го века И. Кеплером была поставлена задача нахождение плотности упаковки трехмерного пространства одинаковыми шарами. В многомерной постановке нахождение соответствующей величины Δ_n оказалась одной из самых сложных задач математики. Ее решение известно только при $n = 1$ (тривиально), 2 (Ф. Тот) и 3 (Т. Холс).

Большую роль играют хорошие границы величины Δ_n. Нижние оценки дают конкретные примеры плотных упаковок, конструирование которых также очень сложно. Наилучшие оценки сверху при $n \geq 4$ найдены средствами гармонического анализа путем решения задач типа Дельсарта. В 1978 году В. Левенштейн и Г. Кабатянский доказали оценку $\Delta_n \leq 2^{-0.5990\ldots(n+o(1))}$. При этом они использовали неравенство Яглома и приближенное решение задачи Дельсарта для сферы, при помощи которой оценивается контактное число τ_n. В 1979 году Левенштейн предложил другую универсальную оценку Δ_n, в которой участвует первый положительный нуль функции Бесселя. В 1989 году для приложений к упаковкам тора оценка Левенштейна была передоказана В. Юдиным. При больших n оценка Левенштейна несколько хуже оценки Левенштейна–Кабатянского, однако ее изучение привело к постановке задачи Дельсарта в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это было сделано в 2000 году Д. Горбачевым и, независимо, в 2001 году Г. Коном и Н. Элкисом. Горбачевым и, независимо, Коном была доказана оптимальность оценки Левенштейна на классе функций с компактным носителем преобразования Фурье. Приближенное решение общей пространственной задачи Дельсарта (без условия компактности) позволило выписать новые верхние оценки плотности упаковки. В частности, при $n = 8, 24$ эти оценки отличаются от нижних «всего» на 10^{-30}. Столь тесные границы для Δ_{24} позволили Кону и А. Кумару в 2004 году решить проблему решетчатой упаковки в 24-мерном пространстве.

Задача об оценке плотности упаковки при помощи схемы Дельсарта тесно связана с другими задачами об оценке экстремальных расположений точек в пространстве, в частности оценках кодов, дизайнов и дискретной энергии. В первую очередь это связано с общностью постановок и схожестью методов решения. Продвижение в любой из указанных задач позволяет прояснить общую ситуацию и дает возможность получить новые результаты в родственных проблемах.

Приведем основные цели исследования.

1. Решение задачи Дельсарта для $\mathbb{R}^n$ при $n = 8, 24$. Как следствие, нахождение плотности упаковки в этих размерностях.
2. Новые оценки Δ_n для небольших n.
3. Асимптотическая оценка Δ_n, лучшая оценки Кабатянского–Левенштейна на экспоненциально убывающий по размерности множитель.
4. Построение параметрических семейств взвешенных сферических дизайнов.
5. Доказательство экстремальности некоторых сферических дизайнов.