Отчет по гранту фонда "Династия" за 2013 год

Ю. Белов

1. Результаты, полученные в 2013 году.

1.1. **Наследственная полнота (M-базисы).** В совместной работе с А. Барановым и А. Боричевым [3] получено полное описание пространств де Бранжа, в которых любая система из воспроизводящих ядер (с полной биортогональной) наследственно полна (Теорема 1.1). Оказалось, что это свойство выполняется только для двух классов пространств де Бранжа. Первый класс пространств - пространства с конечной мерой Кларка - был известен с 60-х годов. Получающие пространства соответствуют *слабым* возмущениям самосопряженных операторов. Пространства второго класса соответствуют тем пространствам де Бранжа, в которых норма может быть задана как интеграл по плоскости (пространства типа Фока). Удалось получить полное описание таких пространств в терминах меры Кларка (Теорема 1.2).

Также в работе [3] исследовалась размерность дефекта в том случае, когда система не является наледственно полной (Теоремы 1.3, 1.4). В частности, доказано, что дефект может иметь бесконечную размерность для любого спектра $\{t_n\}$.

1.2. **Подпространства $C^\infty(a,b)$ инвариантные относительно дифференцирования.** В совместной работе с А. Алеманом и А. Барановым [4] решена проблема описания инвариантных подпространств оператора дифференцирования в $C^\infty(a,b)$ в случае дискретного спектра. Следующий вопрос был поставлен Б. Коренблюмом: *Верно ли, что любое инвариантное подпространство L оператора D ($=\frac{d}{dx}$) такое, что спектр $\sigma(D|_L)$ дискретен, порождается своей резидуальной частью $L_{res} = \cap_{P-\text{полином}} P(D)(L)$ и собственными (корневыми) векторами, лежащими в L?* В работе [4] был получен отрицательный ответ на этот вопрос (Теорема 1.2). С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях про плотность спектра предположение Б. Коренблюма верно (Теорема 1.1). В случае тривиальной резидуальной части ($L_{res} = \{0\}$) ответ также положительный (Теорема 1.3).

1.3. **Базисы суммирования из экспонент.** В совместной работе с Ю. Любарским [6] доказано, что если порождающая функция G системы экспонент $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda} \subset L^2(-\pi,\pi)$ удовлетворяет условию Макенхаупта ($|G(x)|^2 \in (A_2)$) на $\mathbb{R}$, то $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ - базис суммирования в $L^2(-\pi,\pi)$.

1.4. **Пространства де Бранжа и канонические системы.** Пусть $Y(t,z)$ - (единственное) решение системы

$$\frac{\partial}{\partial t} Y(t,z)J = zY(t,z)H(t),\ t\in[0,L], \qquad Y(0,z)=Id, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричная (2×2) функция H - Гамильтониан системы ($H \ge 0$, $trH \equiv 1$). Положим $(A_t(z), B_t(z)) := (1,0)Y(t,z)$, $t \in [0,L]$, и $E_t(z) := A_t(z) - iB_t(z)$.

Тогда функция E - функция класса Эрмита-Билера. Пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ соответствует Гамильтониану H. Одна из наиболее амбициозных задач - выявление соответствий между классами Гамильтонианов H и пространств де Бранжа $\mathcal{H}(E)$. За исключением общей обратной спектральной теоремы де Бранжа (все H соответсвуют регулярным $\mathcal{H}(E)$) известно очень мало таких соответствий. В совместной работе с Е. Абакумовым и А. Барановым [7] получено описание пространств де Бранжа, соответствующих каноническим системам с Гамильтонианом, состоящим из неделимых интервалов, скапливающихся влево. Оказалось, что такие Гамильтонианы порождают пространства де Бранжа с локализаций нулей у функций из пространства. Также в работе [7] исследовались различные типы свойства локализации.

1.5. **Обзорные работы.** Совместно с В. Хавиным написан обзор [5] про теоремы типа Берлинга-Мальявена для пространств де Бранжа.

2. Опубликованные работы:

[1] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, *Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels*, Adv. Math. **235** (2013), 525–554.

[2] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, D. Yakubovich *Recent developments in spectral synthesis for exponential systems and for non-self-adjoint operators*, Recent Trends in Analysis Proceedings of the conferenece in honor of Nikolai Nikolski, Theta Foundation, Bucharest,(2013), 17–34.

3. Препринты:

[3] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, *String M-basis property for systems of reproducing kernels in de Branges spaces*, http://arxiv.org/abs/1309.6915

[4] A.Aleman, A. Baranov, Y. Belov,*D-invariant subspaces of C^∞*, http://arxiv.org/abs/1309.6968

[5] Y. Belov, V. Havin, *The Beurling–Malliavin Multiplier Theorem and its analogs for the de Branges spaces*, http://arxiv.org/abs/1309.7130

[6] Y. Belov, Y. Lyubarskii, *On summation of non-harmonic Fourier series*, to appear in arxiv in December 2013

[7] E. Abakumov, A. Baranov, Y. Belov, *Localization of zeros for Cauchy transforms*, to appear in arxiv in December 2013

4. Доклады

1. 'A restricted shift completeness problem', Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, Aix–Marseille Université, Марсель, Франция, 28 января
2. 'A restricted shift completeness problem', Institut de mathématiques de Jussieu, Le Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Париж, Франция, 7 февраля
3. 'Ограниченность и обратимость дискретного преобразования Гильберта с редкими полюсами', Семинар по комплексному анализу 11 марта г. Москва, МИАН

4. 'Отделимость последовательностей Бесселя в пространствах де Бранжа', Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 18 марта, С.-Петербург
5. 'Approximation of L^2 function on an interval by shifts and exponentials', Hilbert function spaces, 21 мая Гарньяно Италия
6. 'Approximation of L^2 function on an interval by shifts and exponentials', 26th Nordic and 1st European-Nordic Congress of Mathematicians, 10 июня г. Лунд Швеция
7. 'How to sum Fourier series?', XXII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, 25 июня, С.-Петербург
8. 'Спектральный синтез для систем воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа', Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 30 сентября, С.-Петербург
10. 'Mixed completeness problems in the spaces of entire functions', Norwegian University of Science and Technology, 28 октября Трондхейм Норвегия
11. 'D-invariant subspaces of C^∞', Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, Aix–Marseille Université, Марсель, Франция, 25 ноября
12. 'D-invariant subspaces of C^∞', Laboratoire Paul Painlevé, Université des Sciences et Technologies Lille 1, Лилль 29 ноября Франция

5. Участие в конференциях

1. Hilbert function spaces, 20-24 мая Гарньяно Италия, http://hfs2013.dm.unibo.it
2. 26th Nordic and 1st European-Nordic Congress of Mathematicians, 10-13 июня г. Лунд Швеция, http://www.maths.lth.se/nordic26/
3. XXII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, 25-30 июня, С.-Петербург, http://gauss40.pdmi.ras.ru/ma22/

6. Работа в научных центрах и международных группах

1. Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, Aix–Marseille Université, Марсель, Франция
2. Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, Трондхейм Норвегия