Отчет за 2013 год по гранту фонда «Династия»

Герман О. Н.

Полученные в 2013 году результаты

В этом году удалось доказать несколько теорем, усиливающих некоторые классические теоремы, принадлежащие Курту Малеру. Эти теоремы касаются так называемого *принципа переноса*, играющего важную роль в теории диофантовых приближений. Принцип переноса связывает в некотором смысле двойственные задачи. Сформулируем один из упомянутых результатов Малера. Удобнее всего для этого пользоваться понятиями *последовательных минимумов* и *псевдоприсоединенных параллелепипедов*.

Определение 1. Пусть $\ell_1,\ldots,\ell_d$ — d линейно независимых линейных форм на $\mathbb{R}^d$ и пусть $\ell_1^*,\ldots,\ell_d^*$ — двойственный набор линейных форм, то есть $\langle\ell_i,\ell_j^*\rangle=\delta_{ij}$, где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ обозначает скалярное произведение. Рассмотрим параллелепипед

$$\Pi=\Big\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d\,\Big|\,|\ell_i(\mathbf{z})|\leqslant 1,\ i=1,\ldots,d\Big\}.$$

Тогда параллелепипед

$$\Pi^*=\Big\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d\,\Big|\,|\ell_i^*(\mathbf{z})|\leqslant 1,\ i=1,\ldots,d\Big\}$$

называется *псевдоприсоединенным* к параллелепипеду Π.

Определение 2. Пусть M — выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^d$ с центром в начале координат. Пусть Λ — d-мерная решетка в $\mathbb{R}^d$. Тогда k-м последовательным минимумом $\mu_k(M,\Lambda)$ тела M относительно решетки Λ называется минимальное $\mu>0$, такое что μM содержит k линейно независимых точек решетки Λ.

Из результатов, полученных Малером в 1939-м году, следует

Теорема А. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Пусть*

$$\mu_1(\Pi^*,\mathbb{Z}^d)\leqslant 1\quad\text{ и }\quad\mu_1(\Pi,\mathbb{Z}^d)\geqslant 1.$$

Тогда

$$\mu_k(\Pi,\mathbb{Z}^d)\leqslant d^{\frac{1}{d-k}},\quad k=1,\ldots,d-1.$$

В этом году удалось получить следующее усиление теоремы А.

Теорема 1. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Пусть*

$$\mu_1(\Pi^*,\mathbb{Z}^d)\leqslant 1\quad\text{ и }\quad\mu_1(\Pi,\mathbb{Z}^d)\geqslant 1.$$

Тогда

$$\mu_k(\Pi,\mathbb{Z}^d)\leqslant d^{\frac{1}{2(d-k)}},\quad k=1,\ldots,d-1.\tag{1}$$

Для $k=2$ удалось получить несколько более сильное неравенство.

Теорема 2. *Пусть в* $\mathbb{R}^d$ *задан произвольный параллелепипед* Π *с центром в точке начала координат. Пусть*

$$\mu_1(\Pi^*,\mathbb{Z}^d)\leqslant 1 \quad \text{и} \quad \mu_1(\Pi,\mathbb{Z}^d)>1.$$

Тогда

$$\mu_2(\Pi,\mathbb{Z}^d)\leqslant c_d, \tag{2}$$

где c_d *— положительный корень многочлена* $t^{2(d-1)}-(d-1)t^2-1$.

Нетрудно показать, что

$$d^{\frac{1}{2(d-1)}}<c_d<d^{\frac{1}{2(d-2)}}. \tag{3}$$

То есть, действительно, неравенство (2) сильнее неравенства (1) для $k=2$. Кроме того, из (3) следует, что

$$c_d=1+\frac{\ln d}{2d}+O\left(\frac{\ln^2 d}{d^2}\right) \quad \text{при} \quad d\to\infty.$$

В случае $d=3$ удалось доказать неравенства, более сильные, чем (1) и (2), являющиеся к тому же точными.

Теорема 3. *Пусть в* $\mathbb{R}^3$ *задан произвольный параллелепипед* Π *с центром в точке начала координат. Пусть*

$$\mu_1(\Pi^*,\mathbb{Z}^3)\leqslant 1 \quad \text{и} \quad \mu_1(\Pi,\mathbb{Z}^3)>1.$$

Тогда

$$\mu_1(\Pi,\mathbb{Z}^3)\leqslant 2/\sqrt{3} \quad \text{и} \quad \mu_2(\Pi,\mathbb{Z}^3)\leqslant 5/4.$$

При этом константы $2/\sqrt{3}$ *и* $5/4$ *неулучшаемы.*

Наконец, сформулируем теорему, содержащую в себе в некотором смысле бесконечно много теорем переноса. Обычные теоремы переноса в предположении существования точки решетки в одном множестве утверждают наличие точки решетки в некотором другом множестве. Мы же в таком же предположении построим целое *семейство* параллелепипедов, в каждом из которых будет точка решетки.

Пусть Π — произвольный параллелепипед в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке начала координат. Тогда существует такой оператор $\mathrm{A}\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, что $\mathrm{A}\Pi=[-1,1]^d$. Для каждого набора $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_d)\in\mathbb{R}^d_{>0}$ положим

$$\mathrm{H}_{\boldsymbol{\tau}}=\mathrm{A}^{-1}\begin{pmatrix}\tau_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \tau_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \tau_d\end{pmatrix}\mathrm{A}.$$

То есть оператор $\mathrm{H}_{\boldsymbol{\tau}}$ представляет из себя композицию гиперболического поворота и гомотетии, причем оси гиперболического поворота совпадают с осями параллелепипеда Π.

В этом году получена следующая

Теорема 4. *Пусть в* $\mathbb{R}^d$ *задан произвольный параллелепипед* Π *с центром в точке начала координат. Тогда для любого набора* $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d)$*, такого что*

$$\sum_{i=1}^{d} \tau_i^2 = \prod_{i=1}^{d} \tau_i^2, \tag{4}$$

справедливо

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leqslant 1 \implies \mu_1(\mathrm{H}_{\boldsymbol{\tau}}\Pi, \mathbb{Z}^d) \leqslant 1.$$

Опубликованные и поданные в 2013 году работы

[1] O. N. German, N. G. Moshchevitin *A simple proof of Schmidt–Summerer's inequality*, Monat. Math., **170** (2013), 361–370.

[2] О. Н. Герман *Плохо приближаемые матрицы и диофантовы экспоненты*, Чебышевский сборник, **14**:4 (2013), 4–44.

[3] О. Н. Герман, К. Г. Евдокимов *Усиление теоремы переноса Малера*, подано в Известия РАН, Серия математическая.

Участие в работе конференций в 2013 году

- "Multidimensional Continued Fractions" (Грац, Австрия, июнь 2013), пленарный доклад
- 26^{th} Journée Arithmétiques Grenoble 2013 (Гренобль, Франция, июль 2013), секционный доклад
- "Palanga Conference in Combinatorics and Number Theory" (Паланга, Литва, сентябрь 2013), пленарный доклад
- "Geometry, Topology and Applications" (Ярославль, сентябрь 2013), пленарный доклад
- "Thue 150" (Бордо, Франция, октябрь 2013), без доклада

Педагогическая деятельность

- Курс "Теория чисел", мехмат, 4-й курс, лекции и семинары
- Курс "Элементарная теория чисел", мехмат, 1-й курс, семинары
- Курс "Теория чисел", Бакинский филиал МГУ, 4-й курс, лекции и семинары
- Курс "Геометрия", СУНЦ МГУ, 11-й класс, лекции и семинары
- Заведование кафедрой математики СУНЦ МГУ
- Научное руководство двумя аспирантами (Константин Евдокимов и Илья Макаров) и двумя студентами (Ибрагим Тлюстангелов и Вероника Мингалеева)