Отчет по гранту фонда «Династия» за 2013 год

Д.В. Горбачев
Тульский государственный университет

1. Результаты, полученные в 2013 году

Основное внимание в проекте уделяется задаче оценки плотности Δ_d упаковки евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ одинаковыми шарами средствами гармонического анализа путем решения экстремальных задач типа Дельсарта. При этом большой интерес представляют приложения применяемой техники решения экстремальных задач как в метрической геометрии, так и теории функций, в частности, теории приближений. Приведем основные результаты за отчетный период.

1. Одним из главных результатов является доказательство новой нижней асимптотической оценки мощности сферических дизайнов. Она улучшает известные границы на экспоненциально растущий от размерности множитель и, что интересно, в ней участвует оценка плотности Δ_d.

Сферический дизайн — это множество узлов $\{x_\nu\}_{\nu=1}^N \subset S^d$ чебышевской квадратурной формулы с равными весами на единичной сфере евклидова пространства $\mathbb{R}^{d+1}$, точной для всех алгебраических многочленов $f(x_1, \ldots, x_{d+1})$ степени не больше τ:

$$\frac{1}{\mathrm{mes}\,(S^d)} \int_{S^d} f(x)\,dx = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} f(x_\nu).$$

Особый интерес представляют дизайны, обладающие экстремальными свойствами, в частности, минимальные дизайны, состоящие из наименьшего при заданных d и τ числа точек $N(d,\tau)$. Экстремальные дизайны возникают в разнообразных задачах метрической геометрии, алгебраической теории кодирования, вычислительной математики и других. Отметим, что уже в одномерном случае на отрезке чебышевские квадратуры доставляют много вопросов. В свое время они активно исследовались С.Н. Бернштейном (1937), который получил фундаментальные результаты в этом направлении. Эти результаты очень тесно переплетены со случаем сферы S^2. На ультрасферический вес $w_d(t) = (1-t^2)^{d/2-1}$, связанный со сферой S^d и более общий вес Якоби, связанный с компактными пространствами ранга 1, оценки сверху Бернштейна (самая трудная часть) были перенесены А. Куилаарсом (1995).

Нахождение минимальных дизайнов является очень сложной задачей и в настоящее время для $d \geq 2$, $\tau \geq 4$ доказана минимальность всего нескольких конструкций. Для некоторых из них это следует из следующих классических оценок, установленных Ф. Дельсартом, Дж. Геталсом и Й. Зейделем (1977):

$$N(d,\tau) \geq N^{\mathrm{LP}}(d,\tau) \geq \binom{d + \left[\frac{\tau+1}{2}\right] - 1}{d} + \binom{d + \left[\frac{\tau}{2}\right]}{d}.$$

Здесь $N^{\mathrm{LP}}(d,\tau)$ — максимум в единице неотрицательной на отрезке $[-1,1]$ функции с единичным по весу w_d средним значением. Эта задача и ее обобщения теперь называются задачами Дельсарта или оценками линейного программирования. Обычно они формулируются в связи с оценками экстремальных расположений точек в пространстве. Однако аналогичные задачи возникают в других областях, в частности, теории приближений. Дельсарт, Геталс и Зейдель при выводе решили упрощенный вариант экстремальной задачи $N^{\mathrm{LP}}(d,\tau)$ для многочленов степени τ.

Большой интерес представляют асимптотические оценки функции $N(d,\tau)$. В частности, оценка Дельсарта–Геталса–Зейделя фиксированном d и $\tau \to \infty$ дает следующее асимптотическое неравенство:

$$N(d,\tau) \geq C_{DGS}(d)\, \tau^d \,(1+o(1))\,, \quad C_{DGS}(d) = \frac{2^{1-d}}{\Gamma(d+1)}.$$

Универсальная оценка Дельсарта–Геталса–Зейделя за исключением малых τ, сравнимых с d, была улучшена В.А. Юдиным (1997). Он придумал допустимую функцию в задаче $N^{\mathrm{LP}}(d,\tau)$, для которой:

$$N^{\mathrm{LP}}(d,\tau) \geq \frac{\int_{-1}^{1} w_d(t)\, dt}{\int_{t_\tau}^{1} w_d(t)\, dt},$$

где t_τ — ближайший к единице нуль многочлена Якоби $P_\tau^{(d/2,d/2)}$. При больших τ это дает

$$N^{\mathrm{LP}}(d,\tau) \geq C_Y(d)\, \tau^d \,(1+o(1))\,, \quad C_Y(d) = \frac{\Gamma(d/2+1)\Gamma(d/2)}{\Gamma(d)} \left(\frac{2}{q_{d/2}}\right)^d,$$

где $q_{d/2}$ — первый положительный нуль функции Бесселя $J_{d/2}$.

При $d \to \infty$ имеем:

$$\frac{C_{DGS}(d)}{C_Y(d)} = \frac{(q_{d/2}/4)^d}{\Gamma^2(d/2+1)} \sim \frac{(e/4)^d}{\pi d} = 2^{-(0.5573\ldots+o(1))d}.$$

Любобытно, что получившееся отношение в точности совпадает с известной оценкой В.И. Левенштейна (1979) плотности Δ_d:

$$\Delta_d \leq \frac{(q_{d/2}/4)^d}{\Gamma^2(d/2+1)} =: L.$$

Это указывает на тесное переплетение исследуемых задач. Однако указанная оценка плотности в асимптотическом плане не является наилучшей. Г.А. Кабатянский и Левенштейн (1978) доказали, что

$$\Delta_d \leq 2^{-0.5990\ldots(d+o(1))} =: KL.$$

Это оценка до сих пор неулучшена.

Оценка Левенштейна была получена из приближенного решения задачи Дельсарта для кодов на сфере. Позднее автором (2000) и, независимо, Г. Коном и Н. Элкисом (2001–2003) была сформулирована задача Дельсарта для случая оценки плотности упаковки:

$$\Delta_d \leq \Delta_d^{\mathrm{LP}},$$

где величина $\Delta_d^{\mathrm{LP}}/\mathrm{vol}\,(B^d)$ равна максимуму в нуле положительно определенной абсолютно интегрируемой радиальной функции с единичным средним значением, неположительной вне шара радиуса 2. Из оценок упаковок тора это неравенство фактически получил Юдин (1989). По аналогии с результатом Дельсарта, Геталса и Зейделя автором и, независимо, Коном и Элкисом, задача Δ_d^{LP} была решена для целых функций конечной степени и это привело к упомянутой оценке Левенштейна. Функция конечной степени, оказавшаяся единственной экстремальной функцией, без доказательства экстремальности была выписана Юдиным.

Более сложная ситуация обстояла с оценками сверху величины $N(d,\tau)$. Только в 1984 году П. Сеймур и Т. Заславский доказали теорему существования: $N(d,\tau) < \infty$

для любых d и τ. Правильную оценку сверху получили А. Бондаренко, Д. Радченко и М. Вязовская (2010): $N(d,\tau) \le C(d)\tau^d$ (гипотеза Коревара–Мейерса).

Мной доказано следующее асимптотическое неравенство:

$$N^{\mathrm{LP}}(d,\tau) \ge C_{new}(d)\,\tau^d\,(1+o(1))\,, \quad C_{new}(d) = \frac{1}{2^d\Gamma(d)\Delta_d^{\mathrm{LP}}}.$$

Из наилучших оценок Δ_d^{LP}, полученных Коном и Элкисом, автором и Д.В. Филипповым (2004), Коном и Жао (2012), имеем:

$$C_{new}(2) = 0.2756\ldots > C_Y(2) = 0.2724\ldots > C_{DGS}(2) = 0.25,$$

для $d = 2, 8, 24, 36, 72$ соответственно

$$\frac{C_{new}(d)}{C_Y(d)} \approx 1.01, 4.59, 20.84, 40.68, 274.38.$$

Наконец, при $d \to \infty$

$$\frac{C_{new}(d)}{C_Y(d)} = \frac{d}{2}\,\frac{L}{\Delta_d^{\mathrm{LP}}} \ge \frac{d}{2}\,\frac{L}{KL} = 2^{(0.4175\ldots+o(1))d}.$$

Оценка $N(d,\tau) \ge N^{\mathrm{LP}}(d,\tau)$ также справедлива в случае взвешенных сферических дизайнов, для которых

$$\frac{1}{\mathrm{mes}\,(S^d)}\int_{S^d} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{N}\lambda_\nu f(x_\nu), \quad \lambda_n \ge 0.$$

Поэтому приведенные асимптотические результаты справедливы и для взвешенных дизайнов.

Приведенные выше утверждения планируются к публикации в [2].

2. Пусть K^d — класс радиальных положительно определенных функций $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ сферического экспоненциального типа (степени) 2, для которых $\|f\|_1 < \infty$ и $\widehat{f}(0) = 0$, $\lambda(f) = \inf\{\lambda > 0\colon f(x) \le 0,\ |x| \ge \lambda\}$, для $r \in \mathbb{N}$

$$F_r(x,f) = \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\frac{\binom{2r}{r-k}}{\binom{2r}{r-1}}f(kx), \quad \lambda_r^d = \inf\left\{\lambda(F_r(x,f))\colon f \in K^d\right\}.$$

Функционал $F_r(x,f)$ связан с преобразованием Фурье старшей разности $\Delta_h^r\widehat{f}(x)$.

При $r = 1$ величина λ_1^d отвечает наименьшей возможной смене знака функции f среди всех из класса K^d. Эта величина возникает как в метрической геометрии, так и теории приближений. Так Юдиным (1996) было доказано геометрическое неравенство

$$2\pi\rho(L)R(L^*) \le \lambda_1^d,$$

где $\rho(L)$ — радиус упаковки невырожденной решетки $L \subset \mathbb{R}^n$, $R(L^*)$ — радиус покрытия двойственной решетки L^*. Юдин сконструировал функцию $f_d \in K^d$, для которой $\lambda(f_d) \le q_{d/2-1}$. Отсюда он получил правильную по размерности верхнюю асимптотическую оценку

$$4\pi\rho(L)R(L^*) \le d\,(1+o(1))\,.$$

Впоследствии экстремальная задача нахождения величины λ_1^d была решена автором (2000): $\lambda_1^d = q_{d/2} - 1$, единственной экстремальной функцией является функция Юдина f_d. Это позволило доказать точное неравенство Джексона в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$, возникающее в теории приближений.

Мной доказано, что $q_{d/2-1} \le \lambda_1^d < q_{d/2}$. Оценка сверху получается на функции $f \in K^d$, радиальная часть которой равна $f(t) = \int_t^\infty u f_{d+2}(u)\, du$. Эта функция является экстремальной в задаче нахождения величины $\inf\left\{\lambda(f')\colon f \in K^d\right\}$. Этот результат позволяет доказать многомерную теорему Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$E_\sigma(f)_2 \le \binom{2r}{r}^{-1/2} \omega_r\left(\frac{\delta^*}{\sigma}, f\right)_2, \quad \delta^* = 2\lambda_r^d \le 2q_{d/2}.$$

Она является обобщением одномерных результатов Н.И. Черных (1967).

Эти результаты планируются к публикации в [3].

3. В гармоническом анализе и его приложениях большой интерес представляют точные и порядковые весовые неравенства Фурье. Их теория развивается с классического неравенства Хаусдорфа–Юнга $\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \le C_{p,d}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$, $1 \le p \le 2$. Точная константа в этом неравенстве была найдена У. Бекнером (1975). Отметим, что при этом использовалась техника, близкая к используемой при решении задач Дельсарта. В частности, применяется базис из собственных функций преобразования Фурье, выражающийся через многочлены Лагерра.

Обобщением неравенства Хаусдорфа–Юнга являются весовые неравенства Питта

$$C_1 \left\||y|^{-s}\widehat{F}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \le \left\||x|^t F\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C_2 \left\||y|^{-s}\widehat{F}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^d)},$$

которые можно записать в виде порядкого равенства Боаса

$$\left\||y|^{-s}\widehat{F}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \asymp \left\||x|^t F\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Основная проблема состоит в нахождении условий на функцию и параметры, когда это равенство будет верно.

В совместной работе [1] изучается случай, когда в качестве функции F берется произведение радиальной функции $f(r)$ на сферическую гармонику $Y_k(\omega)$. По равенству Бохнера имеем следующее преобразование Фурье:

$$\widehat{fY_k}(\rho\sigma) = (2\pi)^{n/2} i^k Y_k(\sigma) \widetilde{f}_{k,\alpha}(\rho), \quad \alpha = \frac{n}{2} - 1,$$

где для $\alpha \ge -1/2$ и $k \ge 0$ через

$$\widetilde{f}_{k,\alpha}(\rho) = \rho^{-\alpha} \int_0^\infty r^{\alpha+1} J_{\alpha+k}(\rho r) f(r)\, dr, \quad f \in \mathcal{S}(0,\infty),$$

обозначено преобразование Фурье–Ганкеля функции f порядка k.

В сферических координатах имеем

$$\left\||x|^t f Y_k\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|Y_k\|_{L^p(S^{n-1})} \left\|r^{t+(n-1)/p} f\right\|_p.$$

Отсюда следует, что изучение порядкого равенства Боаса для функции fY_k эквивалентно изучению равенства

$$\left\|\rho^{-s+(n-1)/q} \widetilde{f}_k\right\|_q \asymp \left\|r^{t+(n-1)/p} f\right\|_p.$$

В работе [1] получено несколько результатов как с точными константами, так и имеющих порядковый характер, но с оптимальными параметрами. Приведем следующее утверждение.

Пусть GM — класс обобщенно монотонных функций f (он включает обычные монотонные функции): $f \in BV_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$, $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и

$$\int_t^\infty |df(u)| \lesssim \int_{t/c}^\infty |f(u)|\, \frac{du}{u} < \infty, \quad c > 1.$$

Тогда если $1 < p < \infty$, $f \in GM$, $f \geq 0$ и

$$\int_0^1 r^{2\alpha+k+1}|f(r)|\,dr + \int_1^\infty r^{\alpha+1/2}|df(r)| < \infty,$$

то порядковое равенство Боаса

$$\left\|\rho^{-s+(n-1)/p}\widetilde{f}_k\right\|_p \asymp \left\|r^{t+(n-1)/p}f\right\|_p$$

будет справедливо тогда и только тогда, когда

$$\frac{n}{p'} - \frac{n+1}{2} < t < \frac{n}{p'} + k.$$

Это утверждение справедливо для всех не обязательно целых $n = 2\alpha + 2 \geq 1$ и $k \geq 0$.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. L. De Carli, D. Gorbachev, S. Tikhonov (2013). Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms. J. Math. Anal. Appl. 408 (2), 762–774.

2. D. Gorbachev. New asymptotic lower bound for cardinality of spherical designs. Планируется к печати в специальном томе Springer Basel (Birkhäuser) series Trends in Mathematics.

3. Горбачев Д.В. Экстремальные свойства целых функций, оценка характеристик решетчатых упаковок, многомерная теорема Джексона–Стечкина. Планируется к печати в журнале «Математические заметки».

3. Участие в конференциях и школах

07–10 апреля 2013 г. 14th International Conference in Approximation Theory, Сан Антонио, Техас, США. Тема доклада «New asymptotic lower bound for cardinality of spherical designs».

22 июля–02 августа 2013 г. Summer school on Discrete and Computational Geometry, Демино, Ярославль. Тема лекции «LP-bounds for spherical codes and designs».

05–09 августа 2013 г. 9th International ISAAC Congress, Краков, Польша. Тема доклада «Radial positive definite functions and best approximation in $L^2(\mathbb{R}^n)$».

26–30 августа 2013 г. 4th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields, Будапешт, Венгрия. Тема доклада «Asymptotic lower bound for cardinality of weighted spherical designs».

16–20 сентября 2013 г. Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тема доклада «Порядковое равенство Боаса для преобразований Фурье и Ганкеля».

04–08 ноября 2013 г. Joint CRM-ISAAC Conference on Fourier Analysis and Approximation Theory, Беллатерра, Барселона, Испания. Тема доклада «New asymptotic lower bound for cardinality of weighted spherical designs».

Доклады на семинарах:

21 июля 2013 г. Семинар «Экстремальные задачи теории функции и их приложения», Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург (рук. В.И. Бердышев, В.В. Арестов). Тема доклада «Параметрические семейства и оценки мощности взвешенных сферических дизайнов».

02 декабря 2013 г. Семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения», кафедра Общих Проблем Управления мехмата МГУ им. М.В. Ломоносова (рук. А.В. Фурсиков, В.М. Тихомиров, М.И. Зеликин, В.Ю. Протасов). Тема доклада «Оценки мощности сферических дизайнов, приложения дизайнов в 3D-графике» (совм. с С.С. Свистуновым).

4. Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь исполнителем гранта РФФИ № 13-01-00045 «Гармонический анализ Данкля и экстремальные задачи теории приближений и теории функций» в коллективе математиков механико-математического факультета Тульского государственного университета под руководством В.И. Иванова.

5. Педагогическая деятельность

В 2013 году я продолжаю преподавательскую деятельность в должности профессора на кафедре прикладной математики и информатики механико-математического факультета Тульского государственного университета. В весеннем семестре читал курсы «Вариационное исчисление и оптимальное управление» (3 курс), «Методы защиты информации» (4 курс), вел практические и лабораторные занятия по ним. В осеннем семестре читаю курсы «Теория информации и кодирование» (4 курс), «Теория приближений» (4 курс), веду практические и лабораторные занятия, в том числе по курсам «Компьютерная графика», «Базы данных и экспертные системы».

Научное руководство:

С.С. Свистунов, аспирант ТулГУ. Тема диссертации «Интерактивный рендеринг при помощи сферических дизайнов для низкочастотного окружающего освещения». Закончил обучение в 2013 году. Защита состоится 18 декабря 2013 г. в 14-00 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.285.25 на базе ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Д.А. Екатеринчев, студент магистратуры ТулГУ. В 2013 году с оценкой «отлично» защитил магистерскую диссертацию «Использование параллельных вычислений на GPU в задаче классификации текстовых документов».

А.А. Брусенцов, студент магистратуры ТулГУ. В 2013 году с оценкой «отлично» защитил магистерскую диссертацию «Вероятностная классификация документов при помощи шинглов и метода опорных векторов». С осени 2013 года является аспирантом ТулГУ под моим руководством.

Также под мои руководством продолжают обучение 4 студента магистратуры ТулГУ, работают над ВКР и дипломом 4 студента 4 и 5 курса кафедры ПМиИ.