Отчёт М.В. Игнатьева для Фонда «Династия»

Основные результаты, полученные в 2013 г.

1. Геометрия коприсоединённых орбит. Пусть G — комплексная редуктивная группа, T — максимальный тор в ней, B — борелевская подгруппа, содержащая тор T, U — унипотентный радикал группы B, Φ — система корней группы G относительно тора T, Φ^+ — множество положительных корней относительно группы B. Группы B и U действуют на алгебре Ли $\mathfrak{n}$ группы U присоединённым образом; двойственное действие этих групп на сопряжённом пространстве $\mathfrak{n}^*$ называется *коприсоединённым.* Орбиты коприсоединённого действия играют ключевую роль в теории представлений групп B и U согласно методу орбит, открытому А.А. Кирилловым. Явная конструкция представления, соответствующего данной орбите, опирается на нахождение поляризации для какой-нибудь линейной формы, лежащей на орбите. (Напомним, что *поляризацией* для $f \in \mathfrak{n}^*$ называется подалгебра $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{n}$, одновременно являющаяся максимальным f-изотропным подпространством; последнее означает, что $f([x, y]) = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{p}$.)

Полная классификация коприсоединённых орбит в общем случае неизвестна. Практически все орбиты, сколь-нибудь полно изученные к настоящему времени, относятся к так называемым орбитам, ассоциированным с расстановками ладей. *Расстановкой ладей* называется подмножество $D \subset \Phi^+$, состоящее из корней с попарно неположительными скалярными произведениями. Выберем в $\mathfrak{n}$ базис, состоящий из корневых векторов e_α, $\alpha \in \Phi^+$; пусть $\{e_{\alpha^*},\ \alpha \in \Phi^+\}$ — двойственный базис пространства $\mathfrak{n}^*$. Орбитой, *ассоциированной* с расстановкой D, будем называть B-орбиту Ω_D элемента

$$f_D = \sum_{\beta \in D} e^*_\beta.$$

Мной совместно с А.С. Васюхиным были построены поляризации для элементов f_D для всех расстановок ладей в $\Phi = A_{n-1}$. Отождествим A^+_{n-1} с подмножеством $\mathbb{R}^n$ вида

$$\{\epsilon_i - \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Пусть $D = \{\epsilon_{i_1} - \epsilon_{j_1}, \ldots, \epsilon_{i_t} - \epsilon_{j_t}\}$, $1 < i_1 < \ldots < i_t$. Положим $\mathcal{M}_0 = \varnothing$ и для любого $1 \leqslant r \leqslant s$ обозначим

$$\mathcal{M}_{j_r} = \left\{\epsilon_q - \epsilon_{i_r} \mid q > j_r \text{ и } \epsilon_{j_r} - \epsilon_q \notin \bigcup\nolimits_{l=0}^{r-1} \mathcal{M}_{j_l}\right\}.$$

Пусть также $\mathcal{M} = \bigcup_{r=1}^s \mathcal{M}_{j_r}$. Оказывается, что подпространство $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{n}$, натянутое на все $e_{\epsilon_i - \epsilon_j}$, $\epsilon_i - \epsilon_j \notin \mathcal{M}$, будет поляризацией для формы f_D. В частности, размерность орбиты равна $\dim \Omega_D = 2\operatorname{codim}_{\mathfrak{n}} \mathfrak{p} = 2|\mathcal{M}|$. Мы доказали, что она не превосходит $l(w_D)$, где w_D — подстановка из S_n, равная произведению транспозиций $(i_1, j_1) \ldots (i_s, j_s)$, а $l(w_D)$ — её длина, то есть количество инверсий в ней. (Ранее для ортогональных подмножеств D в A_{n-1} мной было доказано, что $\dim \Omega_D = l(w)$.)

Корме того, нами был исследован частичный порядок на множестве расстановок ладей в A^+_{n-1}, индуцированный примыканиями ассоциированных B-орбит. Будем писать $D \leqslant D'$, если для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ выполняется условие $D[i, j] \leqslant D'[i, j]$, где

$$D[i, j] = \#\{\epsilon_a - \epsilon_b \in D \mid a \leqslant i,\ b \geqslant j\}.$$

Оказывается, что $D \leqslant D'$ является необходимым условием для того, чтобы орбита Ω_D лежала в замыкании орбиты $\Omega_{D'}$ (для ортогональных подмножеств эти условия эквивалентны, более того, оба они эквивалентны тому, что $w_D \leqslant w_{D'}$ в смысле порядка Брюа.) Также для произвольной расстановки ладей D нами было описано множество таких расстановок ладей D', что $D' < D$, но не существует расстановки D'', для которой $D' < D'' < D$. Мы рассматрвиаем эти результаты как шаг на пути полного описания примыкания орбит, ассоциированных с расстановками ладей, в комбинаторных терминах.

2. Касательные конусы к многообразиям Шуберта. Обозначим через $\mathcal{F} = G/B$ многообразие флагов, а через X_w — многообразие Шуберта, соответствующее элементу w группы Вейля W системы корней Φ. Важная и трудная задача — описание касательного конуса C_w к X_w в точке $p = eB$. Под *неприведённым* касательным конусом смысле мы понимаем спектр градуированной алгебры R, ассоциированной с фильтрацией локального кольца точки p на многообразии X_w степенями максимального идеала. Также интерес представляет описание *приведённого* касательного конуса C_w^{red}.

Отметим, что касательные конусы тесно связаны с коприсоединёнными орбитами в следующем смысле. Раз $\mathcal{F} = G/B$, то касательное пространство $T_p\mathcal{F}$ естественно отождествляется с $\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \cong \mathfrak{n}^*$, причём легко показать, что действие B сопряжениями на $\mathcal{F}$ индуцирует в точности коприсоединённое действие на $T_p\mathcal{F} \cong \mathfrak{n}^*$ и касательные конусы инвариантны относительно этого действия. Таким образом, касательный конус

$$C_w^{\mathrm{red}} \subseteq T_pW_w \subseteq T_p\mathcal{F}$$

есть объединение коприсоединённых B-орбит.

В 2011 г. Д.Ю. Елисеев и А.Н. Панов вычислили касательные конусы для $\Phi = A_{n-1}$ при $n \leqslant 5$. На основе этих вычислений А.Н. Панов сформулировал следующую гипотезу: если w, w' — произвольные инволюции в W, то их касательные конусы различны. Здесь можно рассматривать как приведённые касательные конусы, так и неприведённые; обе задачи представляют интерес. Эта гипотеза была доказана мной совместно с Д.Ю. Елисеевым в 2012 г. для неприведённых касательных конусов для систем корней, неприводимые компоненты которых имеют тип A_{n-1}, F_4 и G_2.

Основным инструментом в доказательстве являются так называемые *многочлены Костанта–Кумара*. По определению, для $w \in W$ это элемент алгебры регулярных функций на алгебре Ли тора T, равный

$$d_w = (-1)^l \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \cdot \sum \frac{1}{s_{i_1}^{\delta_1}\alpha_{i_1}} \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\delta_1}s_{i_2}^{\delta_2}\alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\delta_1}\ldots s_{i_l}^{\delta_l}\alpha_{i_l}}.$$

Здесь $s_1, \ldots, s_n$ — простые отражения в W, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — соответствующие простые корни в Φ^+, $w = s_{i_1}\ldots s_{i_l}$ — произвольное фиксированное приведённое разложение w, а суммирование ведётся по всем наборам $(\delta_1, \ldots, \delta_l)$ из нулей и единиц, для которых $s_{i_1}^{\delta_1}\ldots s_{i_l}^{\delta_l} = \mathrm{id}$. На самом деле, d_w зависит только от C_w, так что достаточно было доказать, что $d_w \neq d_{w'}$ для разных инволюций w, w'.

Рассуждая аналогичным образом, мы с А.А. Шевченко доказали, что гипотеза будет верна для систем корней, все неприводимые компоненты которых имеют тип B_n и C_n; если w, w' — различные инволюции в группах такого типа, то $C_w \neq C_{w}$. Таким образом, остаётся доказать гипотезу для систем корней типа D_n, E_6, E_7, E_8. Отметим также, что, опираясь на мои результаты об орбитах, ассоциированных с ортогональными расстановками ладей, М.А. Бочкарёв доказал, что для систем корней типа A_{n-1} и C_n для разных инволюций приведённые касательные конусы тоже будут различны.

Публикации в 2013 г.

1. M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra, submitted, see also arXiv: `math.AG/1310.3166`.

2. M.V. Ignatyev, A.S. Vasyukhin. Rook placements in A_n and combinatorics of B-orbit closures. J. Lie Theory, submitted, see also arXiv: `math.RT/1310.3164`.

Школы, конференции и семинары

1. Spring School on Orbits, Primitive Ideals and Quantum Groups. Weizmann Institute of Science, Реховот, Израиль, март 2013 г. (без доклада).

2. Семинар «Algebra, Lie Theory, and Geometry» (рук. проф. И. Пенков). Jacobs University, Бремен, сентябрь 2013 г.. Название доклада: «Bruhat order on involutions and combinatorics of coadjoint orbits».

3. XI Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Саратовский государственный университет, Саратов, сентябрь 2013 г. Два доклада: «Инволюции в группе Вейля и касательные конусы к многообразиям Шуберта для типов B_n и C_n» (совм. с А.А. Шевченко, тезисы опубликованы в сборнике материалов конференции на с. 32–33) и «Расстановки ладей в A_n и примыкания коприсоединённых орбит» (совм. с А.С. Васюхиным, тезисы опубликованы в сборнике материалов конференции на с. 11–13).

Работа в международных центрах и научных группах

Научный визит в Jacobs University, Бремен, Германия, в сентябре–октябре 2013 г., совместная работа с проф. И. Пенковым над переносом метода орбит на бесконечномерные группы, являющиеся прямыми пределами нильпотентных групп Ли.

Педагогическая деятельность

1. В весеннем семестре 2012/2013 учебного года я прочёл спецкурс «Геометрии и группы» студентам 5 курса механико-математического факультета Самарского государственного университета.

2. В июле 2013 г. на V Студенческой летней математической школе, проводившейся СамГУ для студентов и аспирантов механико-математического и физического факультетов, я прочёл мини-курс «Порядок Брюа в группах отражений».

3. В осеннем семестре 2013/2014 учебного года я прочёл спецкурс «Группы и алгебры Ли» студентам 5 курса механико-математического факультета СамГУ.

4. В 2013 г. я руководил работой двух студентов СамГУ — А.С. Васюхина и А.А. Шевченко — и проводил семинарские занятие по курсам «Теория чисел» (1 курс, весенний семестр) и «Алгебра» (1 курс, осенний семестр).

5. В течение всего года я был руководителем учебного семинара для студентов СамГУ «Введение в теорию гомологий».